REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA ŠOLSTVO IN ŠPORT

Naložba v vašo prihodnost
OPERACIJO DELNO FINANCIRA EVROPSKA UNIJA
Evropski socialni sklad

POSLOVNA MATEMATIKA S STATISTIKO

SERGEJ KAPUS

Višješolski strokovni program: Ekonomist
Učbenik: Poslovna matematika s statistiko
Gradivo za 1. letnik

Avtor:
mag. Sergej Kapus, univ. dipl. ing. mat.
LAMPRET CONSULTING, Nova Gorica
Višja strokovna šola

Strokovni recenzent:
Viktor Stare, univ. dipl. ekon.

Lektorica:
mag. Majda Degan, univ. dipl. slav.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51-7:33(075.034.2)
311.1(075.034.2)

KAPUS, Sergej, 1954-
Poslovna matematika s statistiko [Elektronski vir] : gradivo za 1. letnik / Sergej Kapus. - El. knjiga. - Ljubljana : Zavod IRC, 2010. - (Višješolski strokovni program Ekonomist / Zavod IRC)

Način dostopa (URL): http://www.zavod-irc.si/docs/Skriti_dokumenti/PMS_ucbenik-mag__S__Kapus_2010_07_15.pdf. - Projekt Impletum

ISBN 978-961-6824-64-4
252005888

Izdajatelj: Konzorcij višjih strokovnih šol za izvedbo projekta IMPLETUM
Založnik: Zavod IRC, Ljubljana.
Ljubljana, 2010

Strokovni svet RS za poklicno in strokovno izobraževanje je na svoji 126. seji dne 26. 11. 2010 na podlagi 26. člena Zakona o organizaciji in financiranju vzgoje in izobraževanja (Ur. l. RS, št. 16/07-ZOFVI-UPB5, 36/08 in 58/09) sprejel sklep št. 01301-6/2010 / 11-3 o potrditvi tega učbenika za uporabo v višješolskem izobraževanju.

Gradivo je sofinancirano iz sredstev projekta Impletum ‘Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11’.
Projekt oz. operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete ‘Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja’ in prednostne usmeritve ‘Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja’.

KAZALO

PREDGOVOR

Kaj lahko pričakujete od učbenika poslovne matematike s statistiko? Obvladovanje računskih spretnosti pri poslovnih računih in pri statistični analizi? To zagotovo, a še veliko več. Pravilen izračun iskane količine je seveda pomemben, mnogokrat pa je še pomembnejša interpretacija izračunanega rezultata. Na svoji poklicni poti boste morda morali sprejeti kako pomembno poslovno odločitev. Svoje sodelavce boste morali prepričati v pravilnost svoje odločitve. Argumente boste morali podpreti z izračuni in izračunano korektno interpretirati. Ali pa boste morda želeli analizirati povpraševanje potencialnih kupcev izdelka, s katerim želite prodreti na tržišče. V teh in podobnih primerih vam bo priskočilo na pomoč vaše znanje poslovne matematike in statistike.

Učbenik je razdeljen na več poglavij, osem poglavij je namenjenih poslovni matematiki, sedem statistiki. Teoretični del vsakega poglavja je podprt z značilnimi primeri, izračunom so dodane izčrpne razlage, komentarji, slike in tabele. Vir tabel so večinoma statistični letopisi Statističnega urada Republike Slovenije. Tabele brez navedenega vira so avtorsko delo pisca. Sklepni del vsakega poglavja vsebuje kratko zbirko nalog, namenjenih utrjevanju novih vsebin. Predzadnje poglavje prinaša še nekaj dodatnih nalog iz vseh vsebin. Rezultati vseh nalog so zbrani v zadnjem, sedemnajstem poglavju.

Bralcu želim pri branju tega učbenika in pri reševanju nalog veliko zadovoljstva ter uspešno opravljanje izpita.

Sergej Kapus

Ljubljana, marec 2010

1 RAZMERJA IN SORAZMERJA

To poglavje naj bo kratek uvod v poslovno matematiko. V njem predstavimo nekaj matematičnih zakonitosti, prikažemo nekaj računskih spretnosti in obdelamo dva temeljna matematična modela soodvisnosti med dvema spremenljivima količinama. Z večino zapisanega se je bralec zagotovo že kdaj srečal. To znanje bomo priklicali iz spomina in ga osvežili.

1.1 RAZMERJA

Ko ekonomist raziskuje dve količini ali dva zneska, npr. letošnji in lanski dobiček, ga poleg velikosti teh količin pogosto zanima velikostni odnos med njima. Ta odnos lahko prikažemo z njunim razmerjem (npr. z razmerjem med tržno in knjigovodsko vrednostjo delnice, razmerjem med najvišjo in najnižjo plačo v podjetju).

Razmerje $a:b$ (beri a proti b) je nakazano deljenje števila a s številom b oziroma ulomek s števcem a in imenovalcem b. Števili a in b sta ***člena razmerja***. Če izpeljemo nakazano deljenje, dobimo ***količnik*** (***kvocient) k*** razmerja.

$$a:b=\frac{a}{b}=k$$

Primer
Poenostavimo dana razmerja in izračunajmo njihove količnike.

$$6:5=\frac{6}{5}=1{,}2$$
$$612:679\approx 0{,}901$$
$$7:28=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}=0{,}25$$ □

V zadnjem primeru se skriva znano pravilo za preoblikovanje razmerja: zadnji ulomek $\frac{1}{4}$ lahko spet predstavimo kot razmerje $1:4$, kar pomeni, da je razmerje $7:28$ enakovredno razmerju $1:4$. Zapišimo to zakonitost.

Pravilo
Oba člena razmerja smemo pomnožiti ali deliti z istim od 0 različnim številom.

Primer
Poenostavimo dana razmerja.

$600:240=5:2$ Oba člena smo delili s številom 120.

$$\frac{5}{6}:\frac{7}{12}=10:7$$ Oba člena smo pomnožili s številom 12. □

1.2 SORAZMERJA

Sorazmerje je enakost dveh razmerij: $a:b=c:d$. Števili a in d sta ***zunanja člena***, števili b in c pa ***notranja člena*** sorazmerja.

Sorazmerje $a:b=c:d$ pomeni, da je ulomek $\frac{a}{b}$ enak ulomku $\frac{c}{d}$, ta dva ulomka pa sta enaka natanko tedaj, ko je zmnožek ad enak zmnožku bc.

$$a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

(Znak $\Leftrightarrow$ med dvema trditvama ali izjavama pomeni njuno ***ekvivalenco*** ali ***enakovrednost***: iz veljavnosti prve izjave sledi veljavnost druge; prav tako iz veljavnosti druge izjave sledi veljavnost prve). S prevodom računskih zakonitosti, veljavnih za ulomke, v jezik razmerij lahko torej pridobimo pravila za ravnanje s sorazmerji. Začnimo z zgornjo ugotovitvijo.

Pravilo
V sorazmerju je zmnožek zunanjih členov enak zmnožku notranjih členov.

Primer
Naj velja sorazmerje $x:7=2:5$. Izračunajmo neznano število x.

Upoštevajmo zgornje pravilo. Velja $5x=14$ in zato $x=\frac{14}{5}=2{,}8$. □

Pravilo
V sorazmerju smemo narediti poljubno zamenjavo členov, pri kateri se zmnožek zunanjih členov in zmnožek notranjih členov ohranita, npr.: zamenjati smemo notranja člena, zamenjati smemo zunanja člena, zamenjati smemo notranja in zunanja člena.

Primer
Iz sorazmerja $a:b=c:d$ izpeljimo nekaj podobnih sorazmerij:

- z zamenjavo notranjih členov dobimo $a:c=b:d$,
- z zamenjavo zunanjih členov dobimo $d:b=c:a$,
- z zamenjavo notranjih in zunanjih členov dobimo $d:c=b:a$ oziroma $b:a=d:c$. □

Pravilo
Sorazmerje se ohrani, če pomnožimo ali delimo po en zunanji in en notranji člen z istim številom, različnim od 0.

Primer
Poenostavimo sorazmerje $a:b=\frac{14}{9}:\frac{7}{3}$.

Pomnožimo oba člena na desni strani (eden je notranji, drugi zunanji) z 9.

$$a : b = 14 : 21$$

Zdaj lahko oba člena na desni strani še delimo s 7. Tako dobimo preprost zapis prvotnega sorazmerja.

$$a : b = 2 : 3$$ □

Zdaj se lahko lotimo bolj zapletenega problema.

Primer
Poiščimo taki števili x in y, da bo razmerje med njima $x : y = 3 : 2$ in da bo njuna vsota enaka 120.

Take probleme rešimo najučinkoviteje takole: Če velja sorazmerje $x : y = 3 : 2$, je število x trikratnik nekega (še neznanega) števila u, število y pa njegov dvakratnik:

$$x = 3u \quad \text{in} \quad y = 2u$$

Bralec, ki bi raje videl formalno utemeljitev tega sklepa, naj sledi naslednji izpeljavi: Sorazmerje $x : y = 3 : 2$ prevedemo z zamenjavo notranjih členov v sorazmerje $x : 3 = y : 2 = u$, pri čemer je u količnik novega sorazmerja.

Velja torej $x : 3 = \frac{x}{3} = u$ in zato $x = 3u$. Podobno velja $y : 2 = \frac{y}{2} = u$ in zato $y = 2u$.

Zdaj moramo še zadostiti zahtevi $x + y = 120$. Uporabimo zgornjo ugotovitev in rešimo dobljeno enačbo.

$$\begin{aligned} 3u + 2u &= 120 \\ 5u &= 120 \\ u &= 24 \end{aligned}$$

Iskani števili sta $x = 3u = 3 \cdot 24 = 72$ in $y = 2u = 2 \cdot 24 = 48$. □

Več enakih sorazmerij, npr. $a : x = b : y = c : z = k$, lahko zlijemo v eno enačbo. Najprej ugotovimo, da veljajo enakosti $a = kx$, $b = ky$ in $c = kz$. Zdaj lahko zapišemo enakost $a : b : c = kx : ky : kz$. Člene na desni strani enakosti delimo s številom k (ta računski korak nam je že znan iz navadnih sorazmerij). Velja torej enakost

$$a : b : c = x : y : z.$$

Taki enakosti pravimo ***podaljšano*** ali ***razširjeno sorazmerje***. To sorazmerje vsebuje več navadnih sorazmerij, npr.: $a : b = x : y$, $a : c = x : z$, $b : c = y : z$.

Primer
V nekem podjetju zasluži direktor 6.000 EUR, tehnik 1.000 EUR in snažilka 400 EUR mesečno. Predstavimo velikostni odnos med njihovimi dohodki s podaljšanim sorazmerjem.

Označimo njihove mesečne dohodke zapored s črkami D, T in S. Tedaj velja

$$D:T:S = 6.000:1.000:400.$$

Po deljenju členov na desni strani sorazmerja z 200 dobimo poenostavljen zapis.

$$D:T:S = 30:5:2$$

Če pa delimo te člene še z 2, dobimo zanimiv zapis sorazmerja.

$$D:T:S = 15:2{,}5:1$$

Iz zadnje enakosti lahko razberemo, da je direktorjev dohodek 15-kratnik snažilkinega dohodka, tehnikov dohodek pa 2,5-kratnik snažilkinega. □

1.3 PREMO SORAZMERJE

V matematiki in prav tako v ekonomiji pravimo količinam, ki lahko zavzamejo različne vrednosti, ***spremenljivke***. Take količine so npr. stanje glavnice, stanje zalog, vrednost delnice itn. Tistim količinam, katerih vrednost se ne spreminja, pravimo ***konstante***. Znameniti konstanti sta npr. število $\pi \approx 3{,}14159$, ki je enako razmerju med obsegom in premerom krožnice, ali pa svetlobna hitrost $c \approx 300.000$ km/s.

Nekatere spremenljivke so medsebojno povezane, soodvisne. Stanje glavnice je npr. odvisno od časa obrestovanja in od obrestne mere. V ekonomski praksi in tudi v vsakdanjem življenju pogosto srečamo premo sorazmerne in obratno sorazmerne spremenljivke.

Spremenljivki x in y sta ***premo sorazmerni***, če velja enakost

$$y = kx,$$

pri čemer je število k ***sorazmernostni faktor*** premega sorazmerja. V večini primerov iz ekonomske prakse zavzemata spremenljivki x in y pozitivne vrednosti. Zato je sorazmernostni faktor $k > 0$.

Spremenljivka x naj zavzame naslednje izbrane vrednosti:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= 2a \\ x_3 &= 3a \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Izračunajmo ustrezne vrednosti spremenljivke y.

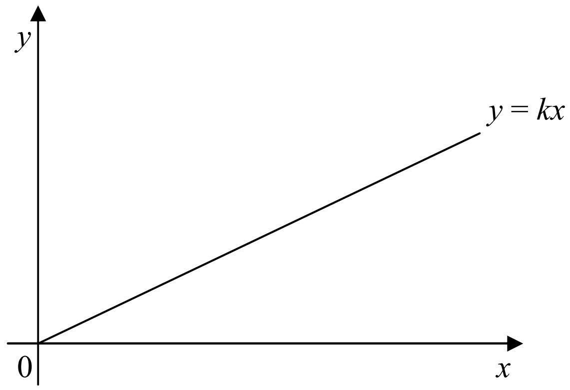
$$\begin{aligned} y_1 &= kx_1 = ka \\ y_2 &= kx_2 = k(2a) = 2(ka) \end{aligned}$$

$$y_3 = kx_3 = k(3a) = 3(ka)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ugotovili smo pomembno lastnost premega sorazmerja:

Pri premo sorazmernih spremenljivkah povzroči dvakratno, trikratno, … povečanje (oziroma zmanjšanje) ene spremenljivke dvakratno, trikratno, … povečanje (oziroma zmanjšanje) druge spremenljivke.

Graf premega sorazmerja je premica skozi izhodišče koordinatnega sistema, v praktičnih primerih iz ekonomije pa tisti del premice, ki leži – zaradi pozitivnosti spremenljivk – v prvem kvadrantu sistema.



Slika 1: Graf premega sorazmerja

Odnos med premo sorazmernima spremenljivkama lahko opišemo tudi z razmerji. Če sta x_1 in x_2 dve poljubni vrednosti spremenljivke x ter $y_1 = kx_1$ in $y_2 = kx_2$ ustrezni vrednosti spremenljivke y, velja

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2 .$$

Primer

Kilogram blaga stane 3 EUR. Opišimo odvisnost vrednosti nabavljenega blaga (y) od nabavljene količine (x).

Ker je vrednost blaga očitno enaka količini pomnoženi s ceno, opiše odvisnost spremenljivke y od spremenljivke x enačba $y = 3x$, kar pomeni, da je vrednost blaga premo sorazmerna količini. Sorazmernostni faktor je cena enote blaga.

Opozoriti moramo, da velja enakost $y = 3x$ pri nakupu 1, 2, … morda 50 kg blaga. Pri nakupu 1 tone tega blaga pa vstopijo v igro novi ekonomski dejavniki, npr. popusti in rabati. Zapisana enačba pri takem naročilu tedaj ne velja več. Zavedati se moramo, da je premo sorazmerje matematični model, ki dobro opisuje stvarnost na nekem omejenem intervalu spremenljivke x. Zunaj tega intervala pa moramo seveda model prirediti stvarnosti in ne morda obratno – prilagajati interpretacijo stvarnosti matematičnemu modelu. □

Neka spremenljivka je lahko ***premo sorazmerna dvema ali več spremenljivkam***. Če je npr. spremenljivka z premo sorazmerna spremenljivkama x in y, velja med njimi zveza

$$z = kxy,$$

pri čemer je konstanta k ***sorazmernostni faktor***.

Primer
Obresti, ki jih glavnica G, obrestovana s p-odstotno letno obrestno mero, navrže v enem letu, znašajo $o = \frac{Gp}{100}$. Letne obresti so torej premo sorazmerne glavnici in obrestni meri. □

1.4 OBRATNO SORAZMERJE

Spremenljivki x in y sta ***obratno sorazmerni***, če je njun zmnožek konstanten. Velja torej enakost

$$xy = k \quad \text{oziroma} \quad y = \frac{k}{x},$$

pri čemer je konstanta k ***sorazmernostni faktor*** obratnega sorazmerja. Tako kot pri premem sorazmerju sta v ekonomski praksi spremenljivki x in y tudi pri obratnem sorazmerju večinoma pozitivni. Zato je sorazmernostni faktor $k > 0$.

Spremenljivka x naj zavzame naslednje izbrane vrednosti:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= 2a \\ x_3 &= 3a \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

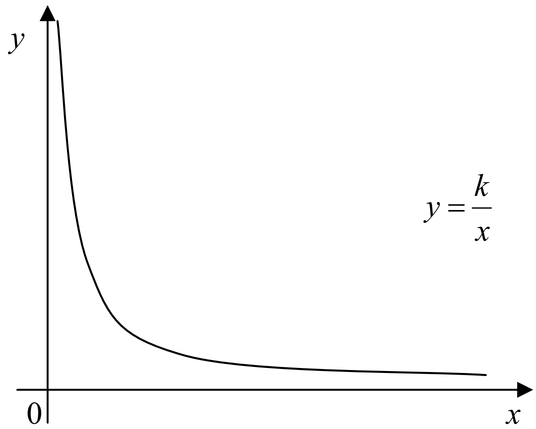
Izračunajmo ustrezne vrednosti spremenljivke y.

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{k}{x_1} = \frac{k}{a} \\ y_2 &= \frac{k}{x_2} = \frac{k}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}\right) \\ y_3 &= \frac{k}{x_3} = \frac{k}{3a} = \frac{1}{3}\left(\frac{k}{a}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ugotovili smo pomembno lastnost obratnega sorazmerja:

Pri obratno sorazmernih spremenljivkah povzroči dvakratno, trikratno, … povečanje ene spremenljivke dvakratno, trikratno, … zmanjšanje druge spremenljivke.

Graf obratnega sorazmerja je hiperbola oziroma tista veja hiperbole, ki leži – zaradi pozitivnosti spremenljivk – v prvem kvadrantu koordinatnega sistema.



Slika 2: Graf obratnega sorazmerja

Odnos med obratno sorazmernima spremenljivkama lahko opišemo tudi z razmerji. Če so npr. x_1, x_2 in x_3 poljubne vrednosti spremenljivke x ter $y_1=\frac{k}{x_1}$, $y_2=\frac{k}{x_2}$ in $y_3=\frac{k}{x_3}$ ustrezne vrednosti spremenljivke y, velja

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}.$$

Pri dveh izbranih vrednostih spremenljivke x oziroma y velja $y_1 : y_2 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}$. Če pomnožimo oba člena na desni strani s produktom $x_1 x_2$, dobi zgornje sorazmerje zanimivo obliko.

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1$$

Pri obratnem sorazmerju je razmerje med prvo in drugo vrednostjo ene spremenljivke enako razmerju med drugo in prvo vrednostjo (pazimo na vrstni red) druge spremenljivke.

Primer
Dva delavca sestavita pomivalni stroj v 1 uri. Koliko časa bi za to delo porabilo 6 delavcev? Kaj pa 2.000 delavcev?

Za reševanje takih problemov je sprejemljiv matematični model obratno sorazmerje: dvakrat toliko delavcev bi (vsaj načelno) opravilo isto delo v polovici časa. Naj bo spremenljivka x število delavcev, spremenljivka y pa porabljen čas. Tedaj imamo $x_1 = 2$ delavca, $y_1 = 1$ ura in $x_2 = 6$ delavcev. Poiščimo neznani čas y_2 s sorazmerjem (pazimo na vrstni red)

$$\begin{aligned} y_1 : y_2 &= x_2 : x_1 \\ 1 : y_2 &= 6 : 2 \\ 6y_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$y_2 = \frac{1}{3}$$

Šest delavcev bi pomivalni stroj sestavilo v $\frac{1}{3}$ ure, torej v 20 minutah. Bralec bo seveda rezultat zlahka poiskal tudi brez računa, s preprostim sklepom: trikrat več delavcev opravi delo v …

Odgovorimo še na drugo vprašanje. Zdaj imamo tisočkrat več delavcev. Če sledimo obratnemu sorazmerju, sklepamo, da bi 2.000 delavcev opravilo delo v $\frac{1}{1.000}$ ure, torej v 3,6 sekunde. Temu rezultatu seveda ne gre verjeti, opozori pa nas, da moramo pri uporabi vsakega matematičnega modela kritično presoditi predpostavke in dobljene rezultate. □

Neka spremenljivka je lahko ***obratno sorazmerna več spremenljivkam***. Če je npr. spremenljivka *w* obratno sorazmerna spremenljivkam *x*, *y* in *z*, velja med njimi zveza

$$w = \frac{k}{xyz},$$

pri čemer je konstanta *k* ***sorazmernostni faktor***.

Za konec poglavja si oglejmo še naslednjo nalogo. Spremenljivka *z* naj bo premo sorazmerna spremenljivkama *x* in *y*. Velja torej enakost

$$z = kxy.$$

Fiksirajmo spremenljivko *y*. Če sta x_1 in x_2 poljubni vrednosti spremenljivke *x* ter $z_1 = kx_1y$ in $z_2 = kx_2y$ ustrezni vrednosti spremenljivke *z*, velja sorazmerje

$$z_1 : z_2 = (kx_1y) : (kx_2y) = x_1 : x_{.2}.$$

Prav tako lahko ugotovimo, da velja pri fiksni vrednosti spremenljivke *x* sorazmerje

$$z_1 : z_2 = y_1 : y_2.$$

Vzemimo zdaj poljubne vrednosti x_1 in x_2 ter y_1 in y_2, z_1 in z_2 pa naj bosta pripadajoči vrednosti spremenljivke *z*. Tedaj velja

$$z_1 : z_2 = (kx_1y_1) : (kx_2y_2) = (x_1y_1) : (x_2y_2).$$

Iz povedanega sledi navodilo, kako lahko zlijemo v eno sorazmerje več zaporednih sorazmerij, če se v vsakem od teh sorazmerij spreminja le po ena spremenljivka.

Če veljata zaporedni sorazmerji

$z_1 : z_2 = x_1 : x_2$ ***pri fiksni vrednosti spremenljivke y in***
$z_1 : z_2 = y_1 : y_2$ ***pri fiksni vrednosti spremenljivke x,***

velja

$$z_1 : z_2 = (x_1y_1) : (x_2y_2).$$

Člene na desni strani zadnjega sorazmerja dobimo tako, da pomnožimo med seboj prve člene prvotnih razmerij in med seboj druge člene. Pravilo lahko brez težav razširimo na primere, ko je v igri več vrednosti spremenljivke z (pomnožimo med seboj prve člene, nato druge člene, nato tretje člene, … prvotnih razmerij), in na primere, ko je spremenljivka z premo ali obratno sorazmerna več spremenljivkam.

Primer
Primerjajmo vrednosti dveh poslov z delnicami neke gospodarske družbe. Pri prvem poslu prodamo trikrat več delnic kot pri drugem. Razmerje med prodajnima cenama delnice pri prvem in drugem poslu je $2:3$. Izračunajmo razmerje med vrednostjo prvega in drugega posla.

Vrednost posla, pri katerem prodamo neko količino delnic po enotni ceni, je premo sorazmerna številu delnic in ceni delnice. Naj bosta z_1 in z_2 vrednosti prvega oziroma drugega posla. Pri isti ceni delnice bi bilo razmerje med njima $z_1 : z_2 = 3:1$, pri istem številu delnic pa $z_1 : z_2 = 2:3$. Uporabimo zgornje navodilo in združimo obe zaporedni sorazmerji v eno sorazmerje. Dejansko razmerje med vrednostma prvega in drugega posla je torej

$$z_1 : z_2 = (3 \cdot 2) : (1 \cdot 3) = 6 : 3 = 2 : 1.$$

Vrednost prvega posla je dvakrat večja od vrednosti drugega. □

Sklep
Kaj smo se naučili? Razmerje dveh ali več količin znamo predstaviti v preprosti in nazorni obliki. Razplesti znamo sorazmerje in poiskati neznano količino. Hitro prepoznamo premo sorazmerne oziroma obratno sorazmerne količine. Več zaporednih sorazmerji znamo zliti v eno sorazmerje, ki vsebuje vso informacijo o obravnavanih količinah.

***

NALOGE

1.1. Poenostavite dana razmerja: $180:72$; $\frac{5}{6}:\frac{7}{12}$; $600:120$; $39:91$; $1{,}2:1{,}5$; $1:0{,}1251:0{,}125$; $9:12:18$; $105:75:45:30$.

1.2. Dve števili sta v razmerju $2:7$, njuna vsota je 630. Kateri sta ti števili?

1.3. Dve števili sta v razmerju $7:5$. Prvo število je za 24 večje od drugega. Kateri sta ti števili?

1.4. Tri števila so v razmerju $12:5:4$. Prvo število je za 36 večje od vsote drugih dveh. Katera so ta števila?

1.5. Dano je razširjeno sorazmerje $x:y:z:w = 12:9:6:4$. Zapišite v čim bolj preprosti obliki naslednja razmerja: $x:y$, $x:z$, $x:w$, $y:z$, $y:w$ in $z:w$.

1.6. Veljajo sorazmerja $a : b = 7 : 4$ in $b : c = 3 : 1$ Zapišite razširjeno razmerje $a : b : c$.

1.7. Veljajo sorazmerja: $a : b = 4 : 3$, $b : c = 2 : 5$ in $c : d = 3 : 2$ Zapišite razširjeno sorazmerje $a : b : c : d$.

1.8. Veljajo sorazmerja: $a : b = 3 : 4$, $b : c = 10 : 7$ in $c : d = 4 : 5$ Zapišite razširjeno sorazmerje $a : b : c : d$. Zapišite v okrajšani obliki še naslednja razmerja: $a : c$, $a : d$ in $b : d$.

1.9. Danim razmerjem poiščite obratna razmerja: $9 : 2$; $2 : 3 : 5$; $2 : 4 : 1 : 5$; $9 : 12 : 18 : 24$; $3 : 2 : 1{,}5 : 1{,}2$.

1.10. Plači delavcev A in B določimo na podlagi treh podatkov. Glede na njuno izobrazbo morata biti v razmerju $1{,}4 : 1$, glede na zahtevnost dela $1{,}5 : 1$ in glede na nevarnost na delovnem mestu $1 : 1{,}8$. Kolikšna je plača drugega delavca, če zasluži prvi 840 EUR na mesec?

2 SKLEPNI RAČUN

Kako razmišljamo, ko skušamo iz podatka o mesečnem prometu napovedati letni promet? Kako razmišljamo, ko skušamo izračunati povprečno hitrost potovanja na znani relaciji? Je letni promet premo ali obratno sorazmeren času? Je povprečna hitrost potovanja premo ali obratno sorazmerna času potovanja? Navedena zgleda sta primera preprostega sklepnega računa. V tem poglavju bomo prikazali načine reševanja takih in tudi bistveno zahtevnejših problemov ter predstavili metode, ki vnesejo red v naše razmišljanje in nas hitro ter učinkovito privedejo do rezultatov.

Sklepni račun je postopek, pri katerem iz danih količin izračunamo neko neznano količino, ki je danim količinam premo ali obratno sorazmerna. Neznanko poiščemo z ***neposrednim sklepanjem***, s ***sorazmerji*** ali pa s priročnimi računskimi ***shemami***. Vse naštete načine reševanja bomo prikazali na preprostih primerih.

Sklepne račune delimo na enostavne in sestavljene. Pri ***enostavnem sklepnem računu*** izračunamo neznano količino iz treh znanih vrednosti (podatkov). Pri ***sestavljenem sklepnem računu*** pa izračunamo neznano vrednost iz 5, 7, 9, … znanih vrednosti.

Primer
Pet delavcev opravi neko delo v 12 urah. V kolikšnem času bi isto delo opravilo 8 delavcev?

Gre za primer enostavnega sklepnega računa. Nalogo rešimo najprej ***z neposrednim sklepanjem***. Čas, ki ga zahteva dano delo, je obratno sorazmeren številu delavcev: dvakrat več delavcev opravi delo dvakrat hitreje, torej v dvakrat krajšem času. Zato lahko sklepamo:

5 delavcev	opravi delo v	12 urah,
1 delavec	opravi delo v	$5 \cdot 12$ urah (potrebuje 5-krat več časa kot 5 delavcev),
8 delavcev	opravi delo v	$\frac{5 \cdot 12}{8}$ urah (potrebujejo 8-krat manj časa kot 1 delavec).

Osem delavcev bi torej opravilo delo v $\frac{5 \cdot 12}{8} = 7{,}5$ ure.

Poskusimo še ***s sorazmerji***. Naj bo spremenljivka x število delavcev in spremenljivka y čas, ki ga zahteva dano opravilo. Spremenljivki sta obratno sorazmerni, zato velja (pazimo na vrstni red):

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1.$$

Upoštevajmo, da je $x_1 = 5$, $y_1 = 12$ in $x_2 = 8$. Dobimo

$$12 : y_2 = 8 : 5$$
$$8y_2 = 12 \cdot 5$$

$$y_2 = \frac{12 \cdot 5}{8}$$
$$y_2 = 7{,}5. \qquad \square$$

Primer

Prevoz 4.525 kg blaga na razdalji 105 km stane 480 EUR. Koliko stane prevoz 3.700 kg blaga na razdalji 125 km, če je cena prevoza premo sorazmerna količini blaga in razdalji?

V besedilu naloge najdemo pet podatkov, torej gre za primer sestavljenega sklepnega računa. Rešimo nalogo ***s sorazmerji***. Naj bo p_1 cena prvega in p_2 cena drugega prevoza. Pri enaki razdalji je razmerje cen prevoza enako razmerju količin blaga

$$p_1 : p_2 = 4.525 : 3.700 \quad \text{(1. količina : 2. količina)},$$

pri enaki količini blaga pa razmerju razdalj

$$p_1 : p_2 = 105 : 125 \quad \text{(1. razdalja : 2. razdalja)}.$$

Obe sorazmerji zlijemo v eno sorazmerje

$$p_1 : p_2 = (4.525 \cdot 105) : (3.700 \cdot 125).$$

Upoštevajmo, da je $p_1 = 480$ EUR, in izračunajmo p_2.

$$480 : p_2 = (4.525 \cdot 105) : (3.700 \cdot 125)$$
$$4.525 \cdot 105 p_2 = 480 \cdot 3.700 \cdot 125$$
$$p_2 = \frac{480 \cdot 3.700 \cdot 125}{4.525 \cdot 105}$$
$$p_2 = 467{,}25 \text{ EUR} \qquad \square$$

Reševanje ilustrirajmo še ***s shemo***.

Primer

S 6 stroji izdelamo v 2 tednih pri deseturnem delavniku 16.000 m blaga širine 100 cm. Koliko metrov blaga širine 80 cm lahko izdelamo z 8 stroji v 3 tednih pri deveturnem delavniku?

V prvi vrstici sheme zapišemo vse količine iz prvega, t. i. pogojnega stavka, v drugo vrstico pa pripadajoče količine iz drugega, tj. vprašalnega stavka. Neznano količino ustrezno označimo in nad njo narišemo puščico, ki kaže proti ključnemu podatku naloge (16.000 m). V drugih stolpcih narišemo puščico, ki kaže navzgor, če je količina v tem stolpcu premo sorazmerna neznani količini, in puščico, ki kaže navzdol, če je ta količina obratno sorazmerna neznani količini. Tako dobimo zapis:

6 strojev	2 tedna	10 ur/dan	16.000 m	100 cm
$\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Uparrow$	$\Downarrow$
8 strojev	3 tedni	9 ur/dan	x	80 cm

Število strojev je npr. premo sorazmerno številu metrov izdelanega blaga, širina blaga pa je obratno sorazmerna številu metrov izdelanega blaga.

Zaradi hitrejšega zapisa rešitve po navadi še obkrožimo podatek, ki je zapisan nad neznanko, v drugih stolpcih pa tiste podatke, ki so zapisani ob začetkih puščic.

6 strojev	2 tedna	10 ur/dan	$\boxed{16.000\text{ m}}$	$\boxed{100\text{ cm}}$
⇑	⇑	⇑	⇑	⇓
$\boxed{8\text{ strojev}}$	$\boxed{3\text{ tedni}}$	$\boxed{9\text{ ur/dan}}$	x	80 cm

Pot do rešitve je zdaj zelo preprosta: neznana količina x je enaka ulomku, katerega števec je zmnožek obkroženih podatkov, imenovalec pa zmnožek ostalih podatkov:

$$x = \frac{16.000 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 100}{6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 80} = 36.000\,\text{m}$$

Bralca vabimo, naj poišče pot do rezultata z neposrednim sklepanjem ali pa s sorazmerji. □

Pri vsaki uporabi takih avtomatiziranih shem moramo seveda kritično presoditi smiselnost predpostavk o premi oziroma obratni sorazmernosti.

Sklep
Spoznali smo učinkovite načine reševanja problemov sklepnega računa. Zdaj znamo spretno in hitro rešiti tudi zelo zahtevne primere z veliko množico vstopnih podatkov.

***

NALOGE

2.1. Za prevoz 3.705 kg blaga na relaciji 28 km plačamo 325 EUR. Koliko bomo plačali za prevoz 1.650 kg blaga na relaciji 65 km, če je cena prevoza premo sorazmerna količini blaga in razdalji?

2.2. Dvanajst delavcev opravi delo v 24 urah. V kolikšnem času opravi isto delo 9 delavcev (144 delavcev, 28.800 delavcev)? Kritično presodite zadnja dva odgovora.

2.3. Z neko količino barve bi lahko prebarvali 180 tekočih metrov opaža širine 90 mm. Za koliko tekočih metrov bi zadoščala enaka količina barve, če bi bil opaž širok 135 mm?

2.4. Neko delo bi bilo opravljeno v 12 dneh, če bi 78 delavcev delalo dnevno po 8 ur. V kolikšnem času bi isto delo opravilo 138 delavcev, če bi delali dnevno po 9 ur?

2.5. Oseminšestdeset delavcev izkoplje v 4 urah 108 m dolg in 48 cm globok jarek. Kako dolg jarek izkoplje 35 delavcev v 8 urah, če je globok samo 42 cm?

2.6. Iz 360 kg surovine lahko izdelamo 45 m transportnega traku širine 96 cm. Kako širok bo trak, če moramo iz 1.200 kg surovine izdelati 160 m traku?

2.7. Dvanajst delavcev naredi na 92 strojih v 4 urah 1.840 m blaga širine 80 cm. Koliko metrov 120 cm širokega blaga bo izdelalo 9 delavcev na 70 strojih v 6 urah?

2.8. Dvainštirideset delavcev izkoplje 84 m dolg, 16 m širok in 4,5 m globok jarek v 4 tednih, če delajo po 8 ur na dan. Kako dolg jarek bo izkopalo 60 delavcev v 2 tednih po 9 ur na dan, če je 10 m širok in 4,8 m globok?

2.9. Petdeset delavcev naredi v 6 tednih pri 8-urnem delavniku 7.200 izdelkov. Koliko ur na dan mora delati 40 delavcev, če morajo v 8 tednih narediti 9.600 izdelkov?

2.10. Deset pleskarjev popleska 60 hiš v 120 dneh. V kolikšnem času popleska 5 pleskarjev 30 hiš?

2.11. Šest kokoši znese v 6 dneh 6 jajc. Koliko jajc znese 18 kokoši v 18 dneh? V kolikšnem času znese 24 kokoši 24 jajc?

3 VERIŽNI RAČUN

To kratko poglavje je namenjeno posebnemu primeru sklepnega računa. Predstavili bomo računsko shemo, t. i. verigo, ki nas zanesljivo vodi skozi nepregleden gozd podatkov in nas uspešno privede do cilja.

Z ***verižnim računom*** lahko rešujemo tiste naloge sklepnega računa, v katerih nastopajo ***samo premo sorazmerne količine***. Jedro tega računa je posebej preprosta in priročna računska shema, t. i. ***veriga***. Izpeljavo pojasnimo kar s primerom.

Primer
Na angleškem tržišču stane bala 42 yd (yd = yard) blaga 525 GBP. Koliko stane slovenskega uvoznika 1 m tega blaga, če predstavljajo uvozni stroški 27 % vrednosti uvoženega blaga. Pretvornik merskih enot: 1 yd = 0,9144 m. Uporabimo devizni tečaj: 1 EUR = 0,8666 GBP.

Veriga ima dva stolpca, v katera vpisujemo podatke. Začnemo z neznano količino (Koliko EUR stane 1 m?). Vpišemo jo na vrh levega stolpca. V desni stolpec vpišemo tisto količino, na katero se vprašanje nanaša (1 m blaga); količino, ki ima isto mersko enoto (0,9144 m) pa vpišemo v levi stolpec naslednje vrstice. Ta količina se nanaša na 1 yd, kar zapišemo v desni stolpec. Postopek nadaljujemo, dokler ne vključimo vseh danih podatkov, pri tem pa vedno pazimo na "poševno" ujemanje merskih enot. Merska enota zadnjega podatka v desnem stolpcu se mora seveda ujemati z mersko enoto, ki jo vsebuje vprašanje.

x EUR	1 m
0,9144 m	1 yd
42 yd	525 GBP
0,8666 GBP	1 EUR
100 EUR	127 EUR

Pojasnimo zadnjo vrstico verige. Za vsakih 100 EUR uvoženega blaga mora uvoznik poravnati še 27 EUR stroškov. Blago in stroški ga torej stanejo 127 EUR.

Navodilo za izračun rešitve je zelo preprosto. Neznano količino x izračunamo tako, da delimo zmnožek vseh količin iz desnega stolpca z zmnožkom vseh količin iz levega stolpca.

$$x = \frac{1 \cdot 1 \cdot 525 \cdot 1 \cdot 127}{0{,}9144 \cdot 42 \cdot 0{,}8666 \cdot 100} = 20{,}03 \text{ EUR}$$

Meter tega blaga stane slovenskega uvoznika 20,03 EUR. □

Primer pokaže prednosti verižnega računa. Shema nas učinkovito vodi skozi množico podatkov, z ujemanjem merskih enot sproti preverjamo konsistentnost verige, neznano količino izračunamo z enostavnimi računskimi operacijami. Vendar ni odveč še enkrat opozoriti: veriga deluje pravilno le ***pri premo sorazmernih količinah***.

Sklep
Spoznali smo še eno učinkovito računsko shemo. V še tako veliki množici vstopnih podatkov (devizni tečaji, pretvorniki med merskimi enotami idr.) se zdaj hitro znajdemo in brez težav izračunamo rezultat.

***

NALOGE

3.1. Bala 45 yd (yard) blaga stane v Londonu 504 GBP. Koliko stane slovenskega uvoznika 1 m tega blaga, če znašajo stroški 25 % vrednosti uvoženega blaga (1 EUR = 0,8666 GBP, 1 yd = 0,9144 m).

3.2. V Londonu stanejo 3 yd (yard) blaga 18 GBP. Koliko bi stalo 16 metrov enakega blaga v Sloveniji (1 yd = 0,9144 m, 1 EUR = 0,8666 GBP)?

3.3. Za 1 lb (libra, pound) blaga smo plačali 0,35 USD. Koliko EUR bi plačali za 200 kg takega blaga (1 lb = 0,4536 kg, 1 EUR = 1,2808 USD)?

3.4. V Angliji stane 35 yd blaga 262,50 GBP. Kolikšna bo prodajna cena slovenskega uvoznika za 1 m tega blaga, če mora pokriti 18 % stroškov, realizirati pa želi 25 % maržo (1 yd = 0,9144 m, 1 EUR = 0,8666 GBP)?

3.5. V Švico smo izvozili blago, ki smo ga pri nas prodajali v 5 kg zavitkih po 8,10 EUR. Koliko CHF smo iztržili za 10 ton tega blaga, če smo plačali posredniku 4 % provizije (1 EUR = 1,4946 CHF)?

3.6. Švedsko podjetje prodaja 1 tono blaga za 23.029 SEK. Koliko dolarjev mora iztržiti za 1.280 kg tega blaga ameriško podjetje, če mora pokriti 36 % stroškov in želi ustvariti 8-odstotni dobiček (1 EUR = 10,8314 SEK, 1 EUR = 1,2808 USD)?

4 RAZDELILNI RAČUN

Kako razdeliti nagrado med člane prvouvrščene ekipe, če so ti različno prispevali k uspehu? Kako razdeliti dobiček med poslovne enote, če so nekatere veliko prispevale k dobičku, druge pa bistveno manj? Na to in na podobna vprašanja bo bralec našel odgovore v tem poglavju.

Z ***razdelilnim računom*** rešujemo probleme delitve dane količine na dva ali več delov, ki so v nekem vnaprej predpisanem odnosu oziroma zadoščajo nekemu predpisanemu pogoju ali več pogojem hkrati. V poslovni praksi gre najpogosteje za delitve nagrad, dobička, izgube, stroškov in podobno, pogoji pa so lahko formulirani kot razmerja med deleži, kot predpisane razlike med deleži itn.

Če je delitev odvisna samo od enega pogoja, t. i. ***ključa*** delitve, gre za ***enostavni razdelilni račun***. Če na delitev vpliva več pogojev hkrati, gre za ***sestavljeni razdelilni račun***. Oglejmo si nekaj primerov.

Primer
Razdelimo znesek 3.000 EUR v razmerju $5:7$.

Gre za primer enostavnega razdelilnega računa. Označimo ustrezna deleža z x_1 in x_2. Tedaj velja $x_1 : x_2 = 5:7$ in $x_1 + x_2 = 3.000$. Iz ključa delitve sklepamo, da je $x_1 = 5u$ in $x_2 = 7u$, iz druge enakosti pa izpeljemo

$$\begin{aligned} 5u + 7u &= 3.000 \\ 12u &= 3.000 \\ u &= 250 \end{aligned}$$

Ustrezna deleža sta torej

$$\begin{aligned} x_1 &= 5u = 5 \cdot 250 = 1.250 \text{ EUR} \\ x_2 &= 7u = 7 \cdot 250 = 1.750 \text{ EUR.} \end{aligned}$$

Preizkusimo rešitev: 1.250 EUR + 1.750 EUR = 3.000 EUR.

Ta delitev se je iztekla v okviru celih števil. Kadar moramo deleže zaokroževati, poskrbimo za to, da njihova vsota ne preseže količine, ki smo jo razdelili. □

Primer
Podjetnik razdeli novoletno nagrado 2.880 EUR trem delavcem obratno sorazmerno njihovim mesečnim dohodkom. Prvi delavec zasluži 600 EUR mesečno, drugi 800 EUR, tretji pa 1.200 EUR. Kolikšne zneske prejmejo delavci?

Označimo zneske, ki jih prejmejo delavci, z x_1, x_2 in x_3. Ker je ključ delitve obratno sorazmerje z mesečnimi dohodki, je razmerje teh zneskov enako razmerju obratnih vrednosti danih dohodkov.

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{600} : \frac{1}{800} : \frac{1}{1.200}$$

Vse tri člene na desni strani razširjenega sorazmerja lahko pomnožimo z istim številom – vzemimo v ta namen kar najmanjši skupni imenovalec danih ulomkov, to je število 2.400. S tem odpravimo ulomke v sorazmerju.

$$x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 2 .$$

Nadaljevanje reševanja je podobno reševanju prejšnjega primera. Iz zapisanega sorazmerja sledi: $x_1 = 4u$, $x_2 = 3u$, $x_3 = 2u$. Vsota deležev mora izčrpati razpoložljivi znesek.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2.880 \\ 4u + 3u + 2u &= 2.880 \\ 9u &= 2.880 \\ u &= 320 \end{aligned}$$

Zato je $x_1 = 4 \cdot 320 = 1.280$, $x_2 = 3 \cdot 320 = 960$ in $x_3 = 2 \cdot 320 = 640$. Prvi delavec prejme 1.280 EUR nagrade, drugi 960 EUR in tretji 640 EUR. □

Primer
Podjetnik bo z delom dobička v višini 4.050 EUR nagradil tri najuspešnejše delavce. Nagrade bodo premo sorazmerne njihovim mesečnim dohodkom in hkrati obratno sorazmerne njihovim odsotnostim z dela v tekočem letu. Prvi delavec zasluži 1.200 EUR mesečno, drugi 880 EUR in tretji 1.400 EUR. Prvi delavec je v tekočem letu izostal z dela 6 dni, drugi 8 dni in tretji 10 dni. S kolikšnimi zneski bodo nagrajeni delavci?

Gre za primer sestavljenega razdelilnega računa, saj je delitev odvisna od dveh ključev. Zneski, ki jih prejmejo delavci, naj bodo x_1, x_2 in x_3. Pri enakem številu odsotnosti z dela bi bilo razmerje teh zneskov

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1.200 : 880 : 1.400 ,$$

pri enakih mesečnih dohodkih, pa bi bilo njihovo razmerje

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{6} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12} .$$

Ti dve zaporedni sorazmerji združimo v eno sorazmerje tako, da pomnožimo enakoležne člene na desnih straneh sorazmerij (tako smo ravnali že v poglavju o sorazmerjih).

$$x_1 : x_2 : x_3 = \left(1.200 \cdot \frac{1}{6}\right) : \left(880 \cdot \frac{1}{8}\right) : \left(1.400 \cdot \frac{1}{10}\right) = 200 : 110 : 140 = 20 : 11 : 14$$

Reševanje nadaljujemo po že znani poti: iz zgornjega razmerja sledi $x_1 = 20u$, $x_2 = 11u$, $x_3 = 14u$ in od tod enačba

$$\begin{aligned} 20u + 11u + 14u &= 4.050 \\ 45u &= 4.050 \\ u &= 90 \end{aligned}$$

Prvi delavec prejme $x_1 = 20 \cdot 90 = 1.800$ EUR nagrade, drugi $x_2 = 11 \cdot 90 = 990$ EUR nagrade in tretji $x_3 = 14 \cdot 90 = 1.260$ EUR nagrade. □

Sklep
Obdelali smo vse variante razdelilnega računa: delitev na dva dela, delitev na več delov, delitev v premem sorazmerju in delitev v obratnem sorazmerju, delitev po enem kriteriju in po več kriterijih hkrati.

***

NALOGE

4.1. Znesek 3.850 EUR razdelimo na dva dela v razmerju $7:4$. Kolikšna sta dela?

4.2. Trije sosedje so skupaj naročili kurilno olje. Prevozne stroške bodo poravnali v enakem razmerju, kot je razmerje naročenih količin, tj. $2:4:5$. Koliko stroškov bremeni posameznega naročnika, če znašajo skupni prevozni stroški 77 EUR?

4.3. V majhni stanovanjski hiši živijo trije solastniki. Prvi je lastnik 80 m^2 velikega stanovanja, stanovanji drugih dveh pa merita po 56 m^2. Stroške investicije v višini 4.800 EUR si razdelijo premo sorazmerno lastniškim deležem. Kolikšni stroški bremenijo posameznega lastnika?

4.4. Denarno pomoč v višini 510 EUR razdelite med tri delavce obratno sorazmerno njihovim dohodkom. Delavci zaslužijo zapored 300 EUR, 540 EUR in 900 EUR mesečno.

4.5. Podjetnik bo del dobička v višini 845 EUR razdelil trem delavcem obratno sorazmerno številu njihovih izostankov z dela v tekočem letu. Prvi delavec je v tekočem letu izostal 12 dni, drugi 18 dni in tretji 24 dni. Kolikšni bodo deleži posameznih delavcev?

4.6. Delodajalec bo razdelil nagrado 1.300 EUR trem delavcem premo sorazmerno njihovim povprečnim mesečnim dohodkom in hkrati obratno sorazmerno njihovim izostankom z dela v tekočem letu. Delavci zaslužijo zapored 600 EUR, 360 EUR in 400 EUR. V tekočem letu so izostali zapored 6 dni, 9 dni in 12 dni. Kolikšne nagrade prejmejo?

4.7. Zaslužek 69.420 d.e. (d.e. = denarna enota) razdelimo med tri skupine delavcev.

4.8.

Tabela 1: Delitev zaslužka med tri skupine delavcev

Skupina	Št. delavcev	Število dni	Delovni čas
1.	9	4	8 ur/dan
2.	10	6	7 ur/dan
3.	5	12	6 ur/dan

Pri delitvi uporabimo tri kriterije hkrati: zaslužek skupine je premo sorazmeren številu delavcev v skupini, premo sorazmeren številu delovnih dni in premo sorazmeren dolžini delovnega dne. Kolikšni so zaslužki posameznih skupin?

4.9. Gradbena podjetja A, B, C so se dogovorila, da bodo stroške izkopa višini 81.000 d.e. (d.e. = denarna enota) razdelila po naslednjem ključu:

- 1/9 stroškov na tri enake dele (1 : 1 : 1),
- 5/9 stroškov premo sorazmerno prostornini izkopa pri posameznem podjetju (prostornine izkopov so v razmerju 4 : 3 : 2),
- ostanek obratno sorazmerno številu delovnih ur, ki jih je podjetje opravilo pri izkopu (20, 30 in 15 delovnih ur).

Kolikšni stroški bremenijo posamezno gradbeno podjetje?

5 PROCENTNI RAČUN

Za procentni račun velja splošno prepričanje, da ga vsi dovolj dobro obvladamo, številne napake in nesporazumi, ki so pogosti pri uporabi procentnega računa v praksi, pa ovržejo to prepričanje. Zato ni odveč nameniti kratko poglavje tudi tej temi.

V ekonomiji lahko predstavimo velikostni odnos med dvema količinama z njunim razmerjem oziroma z ustreznim ulomkom; to smo videli v prvem poglavju,. Če sta, na primer, dve količini v razmerju $3:5$, je prva količina enaka $\frac{3}{5}$ druge. Zaradi lažje primerjave takih ulomkov jih pogosto razširimo na imenovalec 100, v nekaterih primerih pa na imenovalec 1.000. V navedenem primeru bi torej ulomek $\frac{3}{5}$ razširili na ulomek $\frac{60}{100}$. Ugotovitev, da je prva količina enaka $\frac{60}{100}$ druge, izrazimo z besedami: "Prva količina je enaka 60 ***procentom*** ali 60 ***odstotkom*** (zapis: 60 %) druge količine."

Povejmo splošno: ***p procentov*** (***p odstotkov***) dane količine predstavlja *p* stotin te količine ali na kratko: $p\,\% = \frac{p}{100}$. Kadar uporabimo imenovalec 1.000, gre za promile: ***p promilov*** (z znaki p‰) dane količine pomeni *p* tisočin te količine. Velja torej: $p‰ = \frac{p}{1.000}$.

Primer
Pri plačilu računa v višini 250 EUR s kreditno kartico so nam zaračunali 8 EUR provizije za poslovanje s kreditnimi karticami. Razmerje med provizijo in zneskom na računu je enako

$$\frac{8}{250} = 0{,}032 = \frac{3{,}2}{100} = 3{,}2\,\%.$$

Provizija torej znaša 3,2 % zneska na računu. □

Poglejmo formalno plat zadeve. V igri sta dve količini – ena je celota, druga je delež:

C – celota ali ***osnovna vrednost,***
D – delež ali ***del celote.***

Razmerje med deležem in celoto izrazimo v stotinah - število stotin je

p – procent ali ***odstotek*** (v rabi sta tudi izraza ***procentna mera*** in ***procentna stopnja***).

Celota predstavlja 100 %. Delež je premo sorazmeren procentni meri (dvakrat, trikrat, … večji procentni meri ustreza dvakrat, trikrat, … večji delež), zato sklepamo

$$\begin{aligned} 100\,\% &\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ C \\ 1\,\% &\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ C/100 \\ p\,\% &\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (C/100)p. \end{aligned}$$

Dobili smo formulo, ki povezuje osnovne količine procentnega računa.

$$D = \frac{C \cdot p}{100}$$

Opišimo formulo z besedami: delež, ki predstavlja *p* odstotkov celote *C*, je enak $\frac{Cp}{100}$.
Iz zgornje formule lahko izrazimo še ostali dve količini.

$$p = \frac{D \cdot 100}{C}$$

$$C = \frac{D \cdot 100}{p}$$

Primer
Letna premija za avtomobilsko kasko zavarovanje znaša 640 EUR. Zavarovanec, ki mu pripada stalnostni popust, plača 544 EUR. Koliko odstoten je popust?

Osnova za izračun popusta je seveda polna premija, zato je $C = 640$ EUR. Delež je znesek popusta, torej $D = 640 - 544 = 96$ EUR. Odstotek popusta izračunamo s formulo.

$$p = \frac{D \cdot 100}{C} = \frac{96 \cdot 100}{640} = 15\ \%$$

Razmišljamo lahko tudi drugače. Zmanjšana premija 544 EUR je del polne premije 640 EUR. Tedaj je delež $D = 544$ EUR, osnova pa je seveda spet $C = 640$ EUR.

$$p = \frac{544 \cdot 100}{640} = 85\ \%$$

To pomeni, da je zavarovanec plačal 85 % polne premije. Odstotek popusta je torej spet $100\ \% - 85\ \% = 15\ \%$. □

Spreten računar bo morda namesto procentne mere *p* uporabljal kar t. i. ***relativni delež***.

$$r = \frac{D}{C}$$

Zveza med procentno mero in relativnim deležem je očitna: $r = \frac{p}{100}$. Tako npr. pripada procentni meri $p = 6$ relativni delež $r = 0{,}06$, procentni meri $p = 18{,}5$ pa relativni delež $r = 0{,}185$. Tudi v nasprotni smeri gre račun brez težav: relativnemu deležu $r = 0{,}25$ pripada procentna mera $p = 25$. V tej pisavi dobijo formule preprostejšo obliko:

$$D = C\,r$$

$$C = \frac{D}{r}$$

Primer

Na razprodaji so ceno izdelka znižali za 24 %. Izdelek stane 6,46 EUR. Koliko je stal pred razprodajo?

Izhodišče za pocenitev je seveda neznana cena, ki je bila v veljavi pred razprodajo. Nova cena je del izhodiščne – torej $D = 6{,}46$ EUR – in je enaka $100\,\% - 24\,\% = 76\,\%$ stare cene. Zato je procentna mera $p = 76$, ustrezni relativni delež pa $r = 0{,}76$. Uporabimo formulo za neznano celoto.

$$C = \frac{D}{r} = \frac{6{,}46}{0{,}76} = 8{,}50 \text{ EUR}$$

Pred razprodajo je stal izdelek 8,50 EUR. □

Oglejmo si primer procentnega računa, ki ga starejša literatura in praksa imenujeta "procentni račun nad 100".

Primer

Izdelek, ki je prvotno stal 24 EUR, so podražili za 4,5 %. Kolikšna je nova cena?

Ker nas tu zanima predvsem končna cena izdelka, manj pa znesek podražitve, lahko to ceno izračunamo neposredno. Izhodišče je seveda prvotna cena. Nova cena je torej $100\,\% + 4{,}5\,\% = 104{,}5\,\%$ stare cene, zato je $p = 104{,}5$ (procentna mera je večja od 100) oziroma $r = \frac{104{,}5}{100} = 1{,}045$.

Izračunajmo "delež" D, ki v tem primeru predstavlja "povečano celoto", torej novo ceno:

$$D = C\,r = 24 \cdot 1{,}045 = 25{,}08 \text{ EUR}$$

Po podražitvi stane izdelek 25,08 EUR. □

Oglejmo si račun, ki je v trgovinskem poslovanju pogost.

Primer

Cena izdelka z 20-odstotnim davkom na dodano vrednost je 456 EUR. Koliko bo za izdelek plačal kupec, ki je oproščen plačila davka na dodano vrednost?

Osnova za obračun DDV-ja je prodajna cena, zato pomeni navedeni znesek povečano celoto, torej $100\ \% + 20\ \% = 120\ \%$ prodajne cene. Zato je $p = 120$ oziroma $r = 1{,}20$.

Celoto izračunamo s formulo

$$C = \frac{D}{r} = \frac{456}{1{,}20} = 380 \text{ EUR.}$$

Kupec, ki je oproščen plačila DDV-ja, bo plačal 380 EUR. Izračunajmo še znesek DDV-ja. Davek je del celote, torej 20 % prodajne cene: $D = Cr = 380 \cdot 0{,}20 = 76\,\text{EUR}$. Lahko pa dobimo rezultat tudi preprosto z odštevanjem $456 - 380 = 76$ EUR. □

Sklep

Obdelali smo več značilnih primerov procentnega računa, npr. izračun deleža, izračun celote, izračun procentne mere, izračun "povečane celote", in, kar je najpomembnejše, odstranili smo pasti, ki v vodijo do pogostih nesporazumov v vsakdanji praksi.

***

NALOGE

5.1. Koliko je 2,5 odstotkov od 616 kg? Koliko odstotkov od 316 EUR je 39,50 EUR?

5.2. Primerjamo dve seriji izdelkov. V seriji A je med 500 izdelki 85 izdelkov I. kvalitete, v seriji B je med 600 izdelki 95 izdelkov I. kvalitete. Katera serija je boljša?

5.3. Koliko odstotkov čistega zlata je v 14-karatnem zlatu?

5.4. Akviziter dobi 15 % provizije za prodajo knjig. Kolikšna je bila vrednost prodanih knjig, če je prejel 174 EUR provizije?

5.5. Načrtovali smo dohodek 2.550 EUR, dejanski dohodek pa je bil 2.397 EUR. Za koliko odstotkov smo zaostali za načrtom?

5.6. Blago, ki je stalo 35 EUR, so podražili za 15 %. Za koliko EUR se je podražilo in kolikšna je nova cena blaga?

5.7. Pri dvigu gotovine s potovalnimi čeki so nam zaračunali 18 EUR provizije. Vrednost čekov je bila 2.400 EUR. Koliko promilov dvignjenega zneska znaša provizija?

5.8. Po odbitku 5 % popusta smo za blago plačali 36,10 EUR. Kolikšna je bila prvotna prodajna cena?

5.9. Nekdo je zamudil s prijavo davka in je zato moral poleg davka plačati še 10 odstotkov kazni. Koliko davka bi moral sicer plačati, če je skupaj s kaznijo plačal 709,5 EUR?

5.10. Blago smo skupaj z vračunanimi 16-odstotnimi stroški prodali za 406 EUR. Kolikšni so bili stroški?

5.11. Račun smo poravnali takoj, zato nam je prodajalec priznal popust (skonto) v višini 4 % od prodajne cene. Plačali smo 422,40 EUR. Koliko smo prihranili?

5.12. Banka nam je po odbitku 8 ‰ provizije nakazala 208,32 EUR. Koliko bi prejeli brez odbitka?

5.13. Blago stane 186 EUR, v ceno je vključen 20-odstotni DDV. Kolikšna je prodajna cena in koliko znaša DDV?

5.14. Prvotno 19-odstotno stopnjo davka na dodano vrednost so spremenili na 20-odstotno stopnjo. Za koliko odstotkov so se povečali davki?

5.15. Koliko znaša bruto plača uslužbenca, če je po odbitku 32 odstotkov (od bruto plače) dobil neto plačo 918 EUR?

5.16. Izdelek, ki je prvotno stal 250 EUR, so dvakrat podražili: najprej za 8 % in nato še za 6,5 %. Ker se je zaradi višje cene povpraševanje po izdelku zmanjšalo, so izdelek na koncu pocenili za 12 %. Izračunajte končno ceno izdelka. Za koliko odstotkov je zdaj dražji (oz. cenejši) kot pred prvo podražitvijo?

5.17. Tečaj neke delnice se je na borzi povečal za 9 % in znaša 218 EUR za delnico. Kupili smo 50 delnic po stari ceni in jih prodali po novi ceni. Pri vsakem nakupu oziroma prodaji plačamo borzno posredniški hiši 0,8 % provizije od vrednosti posla. Koliko smo zaslužili pri tem poslu?

5.18. Izdelek so trikrat zapored pocenili za 8 %. Za koliko odstotkov se je v celoti pocenil?

5.19. Izdelek so trikrat zapored podražili za 9 %. Za koliko odstotkov se je v celoti podražil?

5.20. Izdelek se je podražil za 12 %, nato pa se je pocenil za 15 %. Ali je zdaj dražji ali cenejši in za koliko odstotkov?

5.21. Avstrijski trgovec je izdelek, ki je stal prvotno 500 EUR, pocenil za 5,6 %. Koliko smo plačali za ta izdelek? Pri izvozu iz Avstrije nam vrnejo 18-odstotni davek na dodano vrednost. Koliko EUR nam bodo vrnili?

6 KALKULACIJE

To krajše poglavje namenimo trgovinski kalkulaciji. Prehodili bomo pot od nabave blaga do oblikovanja drobnoprodajne cene. Kje na tej poti odračunamo vstopni davek na dodano vrednost, kje obračunamo izstopni davek? Kako obračunamo stroške, kako obračunamo maržo? Kako razdelimo stroške na več vrst sorodnih poslovnih učinkov? Odgovore bo bralec našel v tem poglavju.

Kalkulacija je krovna beseda, nadpomenka, ki označuje številna dejanja iz poslovne prakse: predračun, obračun davka na dodano vrednost, izračun prodajne cene, izračun lastne cene, delitev stroškov na stroškovna mesta itn. Oglejmo si dva primera.

Enostavna delitvena kalkulacija
Primerna je za proizvodnjo, pri kateri nastaja samo en končni proizvod, torej en sam poslovni učinek.

Primer
Nabavili smo neto 1.250 kg blaga po 2,40 EUR za kilogram, v ceno je vključen 20 % DDV. Odvisni stroški nabave z vračunanim 20 % DDV znašajo 384 EUR. Realizirati želimo 28 % maržo. Stopnja izstopnega DDV je 20 %. Blago embaliramo v polkilogramske zavitke, pri tem moramo upoštevati 2 % izgubo pri embaliranju (= kalo).

Izračunajte drobnoprodajno ceno, tj. prodajno ceno z davkom na dodano vrednost, za polkilogramski zavitek.

Fakturna vrednost (FV) blaga je neto količina pomnožena s ceno:

$$\mathrm{FV} = 1.250 \cdot 2{,}40 = 3.000 \text{ EUR}.$$

Fakturna vrednost vsebuje 20 % DDV, torej je to 120 % davčne osnove ($r = 1{,}20$). Izračunajmo ***davčno osnovo***

$$3.000 : 1{,}20 = 2.500 \text{ EUR}$$

in ***vstopni DDV*** ($r = 0{,}20$)

$$2.500 \cdot 0{,}20 = 500 \text{ EUR}.$$

Vstopni davek pomeni našo terjatev do države, zato ga odštejemo od fakturne vrednosti. Dobimo ***neto nakupno vrednost (NNV)***

$$\mathrm{NNV} = 3.000 - 500 = 2.500 \text{ EUR}.$$

Znesek odvisnih stroškov vsebuje 20 % DDV. ***Davčna osnova*** je

$$384 : 1{,}20 = 320 \text{ EUR}$$

in znesek ***vstopnega davka***

$$320 \cdot 0{,}20 = 64 \text{ EUR}.$$

Nabavno vrednost blaga (NV) izračunamo tako, da neto nakupni vrednosti prištejemo znesek odvisnih stroškov in odštejemo vstopni DDV, obračunan od stroškov.

$$\text{NV} = 2.500 + 384 - 64 = 2.820 \text{ EUR}$$

Nabavna vrednost je osnova za izračun marže. Zato je ***marža***

$$2.820 \cdot 0{,}28 = 789{,}60 \text{ EUR}.$$

Prodajna vrednost (PV) blaga je nabavna vrednost z dodano maržo.

$$\text{PV} = 2.820 + 789{,}60 = 3.609{,}60 \text{ EUR}$$

Ta vrednost je osnova za obračun izstopnega DDV. Zato je ***izstopni DDV***

$$3.609{,}60 \cdot 0{,}20 = 721{,}92 \text{ EUR}.$$

Prištejmo znesek DDV k prodajni vrednosti, pa imamo ***prodajno vrednost z DDV***.

$$\text{PV z DDV} = 3.609{,}60 + 721{,}92 = 4.331{,}52 \text{ EUR}$$

Pri embaliranju izgubimo 2 % celotne količine blaga, zato moramo zgornjo vrednost razdeliti na 98 % celotne količine, torej na $1.250 \cdot 0{,}98 = 1.225$ kg. Prodajna cena z 20 % DDV polkilogramskega zavitka je torej

$$\frac{\text{PV z DDV}}{\text{neto - kalo}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4.331{,}52}{1.225} \cdot \frac{1}{2} = 1{,}77 \text{ EUR}.$$

□

Delitvena kalkulacija z ekvivalentnimi števili
To vrsto kalkulacije uporabimo, ko gre za delitev stroškov na več vrst sorodnih poslovnih učinkov, ki pa imajo različen vpliv na stroške.

Primer
Podjetje izdela 15.000 izdelkov vrste A, 20.000 izdelkov vrste B in 12.000 izdelkov vrste C. Prostornina izdelka vrste A je 1,5 dm^3, prostornina izdelka vrste B je 1,8 dm^3 in prostornina izdelka vrste C je 2,4 dm^3. Skupni transportni stroški znašajo 11.640 EUR. Izračunajmo, kolikšni transportni stroški bremenijo posamezno vrsto izdelka, če delimo stroške po metodi ekvivalentnih števil, izračunanih glede na prostornino izdelka.

Izdelkom vrste A, B in C pripišimo taka števila a, b in c – pravimo jim ekvivalentna števila –, da je njihovo razmerje enako razmerju prostornin pripadajočih izdelkov. Zato velja:

$$a : b : c = 1{,}5 : 1{,}8 : 2{,}4$$

Vzemimo zdaj za izhodišče izdelek vrste A. Njegovi prostornini 1,5 dm^3 tedaj pripada ekvivalentno število $a = 1$. Če člene razmerja na desni strani zgornje enakosti delimo z 1,5, ugotovimo, da velja sorazmerje:

$$a : b : c = 1 : 1{,}2 : 1{,}6.$$

Iskani ekvivalentni števili sta torej $b = 1{,}2$ in $c = 1{,}6$.

Pri delitvi transportnih stroškov je torej vpliv vsakega izdelka vrste B enakovreden 1,2-kratniku vpliva izdelka vrste A, vpliv vsakega izdelka vrste C pa je enakovreden 1,6-kratniku izdelka vrste A. Drugače povedano: za ***obračunsko enoto (pogojno enoto)*** smo izbrali izdelek vrste A; izdelek vrste B ustreza tedaj 1,2 obračunskim enotam, izdelek vrste C pa 1,6 obračunskim enotam. Izračunajmo števila obračunskih enot za vsako vrsto izdelkov:

$$\begin{aligned}
&\text{vrsta A: } 15.000 \text{ izdelkov} \cdot 1 = 15.000 \text{ obračunskih enot}\\
&\text{vrsta B: } 20.000 \text{ izdelkov} \cdot 1{,}2 = 24.000 \text{ obračunskih enot}\\
&\text{vrsta C: } 12.000 \text{ izdelkov} \cdot 1{,}6 = 19.200 \text{ obračunskih enot}
\end{aligned}$$

Izračunali smo torej 58.200 obračunskih enot. Transportni stroški na obračunsko enoto so torej:

$$\frac{11.640\ €}{58.200} = 0{,}2 \text{ EUR}$$

Izračunajmo, kolikšni stroški bremenijo posamezni poslovni učinek:

$$\begin{aligned}
&\text{vrsta A: } 15.000 \cdot 0{,}2 = 3.000 \text{ EUR},\\
&\text{vrsta B: } 24.000 \cdot 0{,}2 = 4.800 \text{ EUR},\\
&\text{vrsta C: } 19.200 \cdot 0{,}2 = 3.840 \text{ EUR}.
\end{aligned}$$

Stroške smo razdelili, zdaj lahko izračunamo, kolikšni stroški bremenijo posamezen izdelek. Tu seveda upoštevamo dejansko število izdelkov posamezne vrste:

$$\begin{aligned}
&\text{vrsta A: } \frac{3.000}{15.000} = 0{,}20 \text{ EUR na enoto}\\
&\text{vrsta B: } \frac{4.800}{20.000} = 0{,}24 \text{ EUR na enoto}\\
&\text{vrsta C: } \frac{3.840}{12.000} = 0{,}32 \text{ EUR na enoto}
\end{aligned}$$

Za konec prikažimo rezultate s preglednico:

Tabela 2: Delitev stroškov med tri vrste izdelkov

Vrsta izdelka	Proizvedene enote	Ekvivalentna števila	Obračunske enote	Stroški	Stroški na enoto
A	15.000	1	15.000	3.000	0,20
B	20.000	1,2	24.000	4.800	0,24
C	12.000	1,6	19.200	3.840	0,32
			58.200	11.640	

□

Sklep

Pregledali smo primer enostavne delitvene kalkulacije, torej prehodili pot od fakturne cene do drobnoprodajne cene blaga in delitev stroškov na več vrst podobih poslovnih učinkov. Bralec naj z reševanjem spodnjih primerov utrdi svoje znanje in računsko spretnost.

***

NALOGE

6.1. Proizvajalec nam dobavi 2 t 150 kg blaga po 0,36 EUR/kg, vstopni DDV je 20 %. Odvisni stroški z vračunanim 20 % DDV znašajo 97,20 EUR. Doseči želimo 24 % maržo, izstopni DDV je 20 %. Izračunajte prodajno ceno z DDV za 1 kg blaga, upoštevajte 5,5 % kalo.

6.2. Nabavili smo 3 t 200 kg blaga po 1,80 EUR/kg, tara je 9 %, vstopni DDV je 20 %. Stroški nabave z vračunanim 20 % DDV znašajo 77,50 EUR. Marža je 29 %, izstopni DDV je 20 %, kalo je 2,5 %. Izračunajte prodajno ceno z DDV za 1/4 kg vrečko.

6.3. Nabavili smo bruto 1 t 750 kg blaga, tara je 7 %, fakturna cena je 1,85 EUR/kg, vstopni DDV je 20 %. Stroški prevoza z vračunanim 20 % DDV znašajo 29 EUR. Realizirati želimo 45 % maržo, izstopni DDV je 20 %, upoštevati moramo 3 % kalo. Kolikšna je prodajna cena z DDV za 1 kg?

6.4. Nabavili smo 1.980 kg blaga po 3 EUR/kg, tara je 5 %, vstopni DDV je 20 %. Odvisni stroški z vračunanim 20 % DDV znašajo 115,20 EUR. Marža je 18 %, izstopni DDV je 20 %, kalo je 3 %. Izračunajte prodajno ceno z DDV 1/4 kg zavitka.

6.5. Nabavili smo 6.000 izdelkov po 4,50 EUR za kos, vstopni DDV je 20 %. Prevozni stroški z vračunanim 20 % DDV znašajo 275 EUR. Kolikšna bo naša prodajna cena tega izdelka (z 20 % DDV), če želimo realizirati 50 % maržo?

6.6. Grosistova cena za zavitek kave je 2,17 EUR, v ceno je vključen 8,5 % DDV. Pri naročilu vsaj 1.000 zavitkov ponuja 10 % blagovni popust, pri pravočasnem plačilu pa še 2 % skonto na fakturno vrednost.

- Podjetnik A je naročil 1.000 zavitkov in jih plačal takoj. Za dobavo pošiljke je z 20 % DDV plačal 60 EUR. Realiziral je 30 % maržo, izstopni DDV je 8,5 %. Kolikšna je njegova prodajna cena z DDV za zavitek kave?

- Podjetnik B ni zavezanec za plačilo DDV (posluje zunaj sistema DDV). Nabavil je 1.000 zavitkov kave pri istih pogojih, realizirati pa želi enak znesek marže kot podjetnik A. Kolikšna bo njegova prodajna cena za zavitek? Ali bo konkurenčnejši?

6.7. Podjetje izdela 4.000 izdelkov vrste A, 6.200 izdelkov vrste B, 5.000 izdelkov vrste C in 7.500 izdelkov vrste D. Izdelek vrste A tehta bruto 320 g, izdelek vrste B 200 g, izdelek vrste C 360 g in izdelek vrste D 240 g. Skupni transportni stroški znašajo 4.590 EUR. Kolikšni transportni stroški bremenijo posamezno vrsto izdelka, če delimo stroške po metodi ekvivalentnih števil, izračunanih glede na bruto težo izdelka?

7 NAVADNI OBRESTNI RAČUN

Navadno obrestovanje se je v veliki meri umaknilo iz bančne prakse in odstopilo prostor obrestnemu obrestovanju. Kljub temu namenimo kratko poglavje navadnemu obrestovanju in ob tem osvetlimo nekaj temeljnih pojmov obrestovanja, kar nam bo koristilo v naslednjem poglavju pri obravnavi vsebinsko in tehnično zahtevnejšega obrestnega obrestovanja.

Posojilodajalec, ki za neko obdobje odstopi določen znesek posojilojemalcu, se za ta čas odpove uporabi tega zneska. Zato pričakuje ustrezno denarno nadomestilo. To nadomestilo so obresti. Zato lahko upravičeno zapišemo: ***obresti so cena denarja.***

Znesek obresti je odvisen od ***glavnice***, ***kapitala*** (v večini primerov gre tu za premo sorazmerje), od ***časa obrestovanja*** (čas je običajno merjen v letih, mesecih ali celo v dnevih) in od ***obrestne mere***.

Obresti se dani glavnici pripisujejo periodično: letno, polletno, mesečno, … Obdobju med dvema zaporednima pripisoma obresti pravimo ***kapitalizacijsko obdobje***. ***Valuta*** (trenutek dospetja) nekega finančnega dogodka in ustreznega zneska je datum, ko ta dogodek nastopi. Na primer: valuta anuitete nekega posojila, je datum, ko moramo anuiteto odplačati.

Dveh zneskov, ki valutirajo v različnih trenutkih, ne moremo neposredno primerjati. Primerjava je mogoča, če jih ***reduciramo*** oziroma preračunamo ***na isti termin***. Za skupni termin običajno izberemo valuto kasnejšega zneska, znesek, ki dospeva pred tem terminom, pa ***naobrestimo***, tj. mu pripišemo ustrezne obresti od trenutka njegovega dospetja do izbranega termina. Za skupni termin je marsikdaj smiselno izbrati valuto zneska, ki dospeva prej. Znesek, ki dospeva kasneje, pa v tem primeru ***razobrestimo***, tj. mu odvzamemo ustrezne obresti za čas med izbranim terminom in njegovim dospetjem.

Kdaj plačati (izplačati) obresti, na začetku ali na koncu kapitalizacijskega obdobja? Glede na odgovor na zastavljeno vprašanje obstajata dva koncepta obrestovanja.

- Pri **dekurzivnem obrestovanju** se obresti obračunajo na koncu kapitalizacijskega obdobja, osnova za obračun pa je začetna vrednost glavnice. Končna vrednost glavnice je enaka ***naobresteni*** začetni vrednosti.

- Pri **anticipativnem obrestovanju** se obresti obračunajo (in plačajo) na začetku kapitalizacijskega obdobja. Osnova za obračun je končna vrednost glavnice. Začetna vrednost glavnice je tedaj enaka ***razobresteni*** (***diskontirani***) končni glavnici. Tak obračun je seveda smiseln le pri kreditnih poslih.

Če je čas obrestovanja daljši od enega kapitalizacijskega obdobja, se postavi vprašanje, katera glavnica je osnova za obračun obresti v drugem, tretjem, … kapitalizacijskem obdobju: začetna glavnica ali glavnica, oplemenitena z obrestmi iz prejšnjih obdobij? Glede na ta odgovor pa obstajata dve vrsti obrestovanja: ***navadno obrestovanje*** in ***obrestno obrestovanje***. Slednjemu posvetimo naslednje poglavje, v tem pa obravnavamo navadni obrestni račun.

Osnova za obračun obresti pri ***navadnem obrestnem računu*** je začetna glavnica, in sicer neodvisno od tega, koliko kapitalizacijskih obdobij je minilo do obračuna. Vsako kapitalizacijsko obdobje prispeva enak znesek obresti – pravimo, da ***narašča glavnica linearno***. V praksi ga srečamo predvsem v kratkoročnih poslih.

Pri navadnem obrestnem računu so obresti ***premo sorazmerne glavnici***, ***času obrestovanja*** in ***obrestni meri***. Izračunajmo obresti, ki jih prispeva glavnica G po enem letu obrestovanja z letno obrestno mero p:

$$o = \frac{Gp}{100}.$$

Za l let imamo tedaj

$$o = \frac{Gpl}{100}.$$

Za prakso so bolj zanimive izpeljanke za m mesecev oziroma za d dni obrestovanja:

$$o = \frac{Gpm}{1200}$$

$$o = \frac{Gpd}{36.500} \quad \text{v neprestopnem letu in}$$

$$o = \frac{Gpd}{36.600} \quad \text{v prestopnem letu.}$$

Kadar merimo čas obrestovanja v dnevih, se postavi vprašanje, kam sodita mejna dneva, dan sklenitve posla in zaključni dan. V poslovanju se najpogosteje uporablja naslednji pristop: dan sklenitve posla ne sodi v čas obrestovanja, zaključni dan pa sodi. V praksi so lahko tudi drugačni dogovori.

V praksi navajamo običajno letne obrestne mere, kar včasih poudarimo z oznako p.a. (okrajšava za latinski izraz *per anno* = za leto). Podatek 6 % p.a. tako pomeni 6 odstotno letno obrestno mero. Za krajša časovna obdobja so v rabi oznake p.s. za polletno, p.q. za četrtletno, p.m. za mesečno in p.d. za dnevno obrestno mero.

Primer
4. marca 2009 smo v banko vložili 10.000 EUR. Letna obrestna mera je bila 4,8 %, pri obrestovanju vloge je banka uporabila dekurzivno navadno obrestovanje, čas obrestovanja je merila v dnevih, prvega dne ni vštela v čas obrestovanja, zadnji da pa je vštela. Kolikšno je bilo stanje vloge 9. oktobra 2009?

Začetna glavnica je bila $G = 10.000$ EUR, letna obrestna mera $p = 4{,}8\,\%$. Preštejmo število dni obrestovanja. 4. marec ne sodi v čas obrestovanja zato moramo od 31 dni v marcu odšteti prve 4 dneve. Vloga se je zato v marcu obrestovala $31 - 4 = 27$ dni. 9. oktober sodi v čas obrestovanja, zato moramo v oktobru upoštevati prvih 9 dni. Seštejmo dneve po mesecih:

$$d = 27 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 9 = 219 \text{ dni.}$$

Izračunajmo pridobljene obresti.

$$o = \frac{Gpd}{36.500} = \frac{10.000 \cdot 4{,}8 \cdot 219}{36.500} = 288 \text{ EUR}$$

9. oktobra 2009 je bilo stanje glavnice $10.000 + 288 = 10.288$ EUR. □

Oznaka G^+ naj pomeni vrednost naobrestene glavnice pri dekurzivnem obrestovanju, torej $G^+ = G + o$. Kako izračunati vrednost začetne glavnice G iz znane vrednoti naobrestene glavnice G^+? Kratka izpeljava nam da formuli (v variantah za *d* dni oziroma *m* mesecev):

$$G = \frac{36.500 G^+}{36.500 + pd}$$

$$G = \frac{1.200 G^+}{1.200 + pm}$$

Primer

Dolg smo poravnali po 8 mesecih z zneskom 3.828 EUR. Upnik je obresti obračunal z 9,5 % letno obrestno mero, uporabil je dekurzivno navadno obrestovanje, čas zadolžitve je štel v mesecih. Kolikšen je bil začetni dolg?

Vrnili smo naobresteno glavnico $G^+ = 3.828$ EUR, letna obresta mera je $p = 9{,}5\,\%$, čas obrestovanja je $m = 8$. Izračunajmo začetno glavnico.

$$G = \frac{1.200 G^+}{1.200 + pm} = \frac{1.200 \cdot 3.828}{1.200 + 9{,}5 \cdot 8} = 3.600 \text{ EUR}$$

Zadolžili smo se za 3.600 EUR. □

Kako ravnati v podobnem primeru pri anticipativnem obrestovanju? Naj bo G^- vrednost razobrestene glavnice, torej $G^- = G - o$. Kako izračunati neznano glavnico G iz znane glavnice G^-? Odgovor:

$$G = \frac{36.500 G^-}{36.500 - pd}$$

$$G = \frac{1.200 G^-}{1.200 - pm}$$

Bralec bo formule za *d* dni obrestovanja zlahka prilagodil obrestovanju v prestopnem letu.

Primer

Najeli smo kratkoročni kredit, poravnali ga bomo čez 180 dni. Letna obrestna mera je 10 %. Banka obračuna kredit z anticipativnim navadnim obrestovanjem in nam izplača 4.753,42 EUR gotovine. S kolikšnim zneskom bomo poplačali dolg?

Ker gre za anticipativno obrestovanje, smo prejeli razobresteno glavnico $G^{-}=4.753,42$ EUR, anticipativna obrestna mera je $p=10$ %, čez $d=180$ dni pa bomo dolg poplačali z zneskom G. Izračunajmo:

$$G=\frac{36.500\,G^{-}}{36.500-pd}=\frac{36.500\cdot 4.735,42}{36.500-10\cdot 180}=4.999,995...\approx 5.000\,\text{EUR}$$

Po 180 dneh zadolžitve bomo dolg poravnali z zneskom 5.000 EUR. □

Sklep
Spoznali smo veliko temeljnih pojmov obrestnega računa, kot so: glavnica, obresti, obrestna mera, kapitalizacijsko obdobje, valuta finančnega dogodka, redukcija glavnic na isti termin, dekurzivno in anticipativno obrestovanje. Pri navadnem obrestovanju znamo iz začetnega stanja glavnice izračunati njeno končno stanje in obratno: iz njenega končnega stanja izračunati začetno. Vse to nam bo pomagalo pri obravnavi obrestnega obrestovanja v naslednjem poglavju.

***

NALOGE

7.1. Petega novembra 2008 si je nekdo sposodil 5.000 EUR. Kolikšne obresti je moral plačati, ko je 10. februarja 2009 vrnil denar, če je obrestna mera 9 % p.a. (dekurzivno navadno obrestovanje)?

7.2. Kolikšno bo čez eno leto stanje glavnice 15.000 EUR pri 7,5 % letni obrestni meri in dekurzivnem navadnem obrestovanju?

7.3. Koliko moramo na začetku leta vložiti v banko, da nam bodo ob koncu leta pri 8 % obrestni meri pripisali 988,00 EUR obresti (dekurzivno navadno obrestovanje)?

7.4. Kolikšna je letna obrestna mera, če dobimo od glavnice 45.000 EUR v 3 mesecih 675,00 EUR obresti (račun s celimi meseci, dekurzivno navadno obrestovanje)?

7.5. Prvega aprila 2008 smo si sposodili 15.000 EUR, obrestna mera je 8 % p.a., dekurzivno navadno obrestovanje. Koliko smo morali vrniti 15. julija 2008?

7.6. Izposodili smo si 24.000 EUR pri letni obrestni meri 12 % (dekurzivno navadno obrestovanje). Čez koliko dni moramo vrniti dolg, da obresti ne bodo presegle 1.000 EUR?

7.7. Koliko dni se mora pri 8,5 % letni obrestni meri obrestovati glavnica 65.000 EUR, da naraste na 70.000 EUR (dekurzivno navadno obrestovanje)?

7.8. Katera glavnica naraste v devetih mesecih pri obrestni meri 7,5 % p.a. na 12.000 EUR (dekurzivno navadno obrestovanje)?

7.9. Vrnili smo glavnico in 12 % zamudne obresti, skupaj 12.441,53 EUR. Kolikšen je bil dolgovani znesek, če smo s plačilom zamudili 35 dni (dekurzivno navadno obrestovanje)? Kolikšne so bile zamudne obresti?

7.10. V začetku junija, julija in avgusta smo trikrat vložili enak znesek in konec avgusta z obrestmi vred dvignili 7.144 EUR. Kolikšna je bila posamezna vloga (p = 8 % p.a., dekurzivno navadno obrestovanje, čas računamo v mesecih)?

7.11. V banko smo vlagali vsak mesec na začetku meseca vedno enak (neznan) znesek. Ob koncu leta smo imeli v banki 2.504 EUR. Kolikšne so bile mesečne vloge (p = 8 %, dekurzivno navadno obrestovanje)?

7.12. Eno leto vlagamo vsak mesec na koncu meseca po 200 EUR. Kolikšno bo stanje vlog ob koncu leta (p = 8 %, dekurzivno navadno obrestovanje)?

7.13. Do dolžnika imamo terjatev 20.000 EUR, ki dospe 31. julija. Kdaj lahko dolžnik poravna to terjatev z zneskom 19.572,60 EUR, če je letna diskontna obrestna mera 12 %?

7.14. Kolikšna je diskontirana vrednost glavnice 80.000 EUR, ki dospeva čez 8 mesecev (p = 10 % p.a., navadni obrestni račun, dekurzivno obrestovanje)?

7.15. Kolikšna je diskontirana vrednost glavnice 80.000 EUR, ki dospeva čez 8 mesecev (p = 10 % p.a., navadni obrestni račun, anticipativno obrestovanje)?

7.16. Za 6 mesecev si izposodimo 5.000 EUR (letna obrestna mera p = 9,5 %, anticipativno navadno obrestovanje). Koliko gotovine prejmemo na račun tega kredita? Kolikšen kredit bi morali najeti, če bi želeli dobiti 5.000 EUR gotovine?

8 OBRESTNO OBRESTNI RAČUN

Obrestno obrestovanje je pri dolgoročnih poslih izpodrinilo navadno obrestovanje iz prakse vseh svetovnih bank. Rast glavnice pri obrestnem obrestovanju je po prvem kapitalizacijskem obdobju bistveno hitrejša od rasti glavnice pri navadnem obrestovanju, kar pomembno ublaži inflacijsko razvrednotenje denarja (glej primerjavo navadnega in obrestnega obrestovanja na sliki 3 spodaj). Citirajmo znamenitega fizika in nobelovca Alberta Einsteina. Na novinarsko vprašanje, katera je najmočnejša sila v vesolju, je izstrelil kot iz topa: "Obrestno obrestni račun." V tem poglavju bomo pokazali, da je v tem, kar je v šali omenil znani nobelovec, tudi veliko resnice.

8.1 OBRESTNO OBRESTOVANJE

Koncept obrestnega obrestovanja se bistveno razlikuje od navadnega obrestovanja. Izhodišče za obračun obresti v nekem kapitalizacijskem obdobju je začetna glavnica in vse obresti, pridobljene v predhodnih kapitalizacijskih obdobjih. V praksi se tako obrestovanje uporablja pri dolgoročnih poslih, naše banke ga še vedno uporabljajo tudi v kratkoročnem poslovanju, čeprav se na to področje počasi spet vrača navadno obrestovanje.

Oglejmo si ***dekurzivni obrestno obrestni račun***. Naj bo G_0 začetna glavnica in p obrestna mera. Stanje glavnice po n obdobjih obrestovanja označimo z G_n, pri čemer je $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Obrestni meri p priredimo ***dekurzivni obrestovalni faktor***

$$r = 1 + \frac{p}{100}.$$

Tako je na primer pri 6 % obrestni meri ustrezen obrestovalni faktor $r = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$. In obratno: obrestovalni faktor $r = 1{,}035$ pripada obrestni meri $p = 3{,}5\ \%$. Stanje glavnice po enem kapitalizacijskem obdobju je tedaj

$$G_1 = G_0 + o = G_0 + \frac{G_0 p}{100} = G_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0\, r.$$

V drugo kapitalizacijsko obdobje vstopi glavnica G_1. Osnova za obračun obresti je torej nova glavnica. Tako dobimo

$$G_2 = G_1 + \frac{G_1 p}{100} = G_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_1\, r = G_0\, r^2.$$

Stanje glavnice G_0 po n kapitalizacijskih obdobjih dekurzivnega obrestnega obrestovanja je

$$G_n = G_0 r^n.$$

Primer

Začetna glavnica G_0 naj bo 10.000 EUR in letna obrestna mera $p = 5{,}6$ %. Izračunajmo stanje te glavnice po 5, 10, 20 in (samo kot zanimivost) 100 letih obrestnega obrestovanja z letno kapitalizacijo.

Letni obrestni meri $p = 5{,}6$ % pripada letni obrestovalni faktor $r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5{,}6}{100} = 1{,}056.$

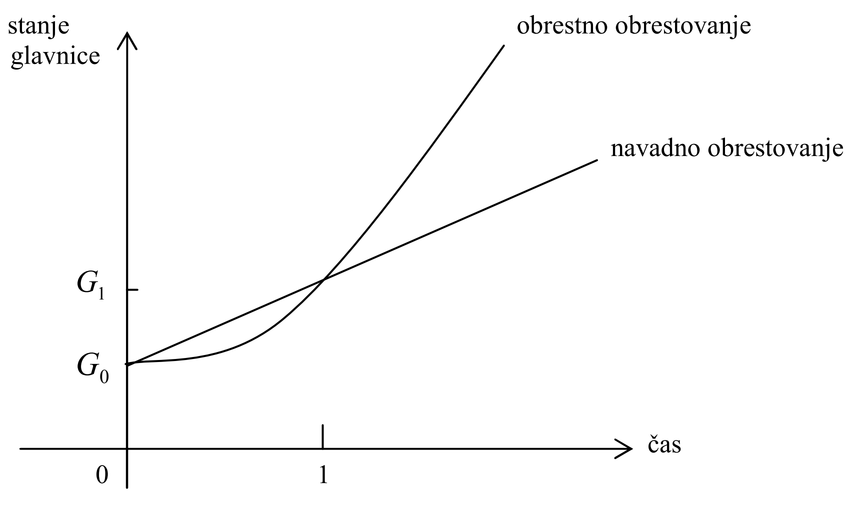
Izračunajmo iskana stanja G_5, G_{10}, G_{20} in G_{100}.

$$G_5 = G_0 r^5 = 10.000 \cdot 1{,}056^5 = 13.131{,}66 \text{ EUR}$$
$$G_{10} = G_0 r^{10} = 10.000 \cdot 1{,}056^{10} = 17.244{,}05 \text{ EUR}$$
$$G_{20} = G_0 r^{20} = 10.000 \cdot 1{,}056^{20} = 29.735{,}71 \text{ EUR}$$

Stanje glavnice hitro (pospešeno) narašča, po 100 letih obrestovanja doseže skoraj vrtoglavo vrednost

$$G_{100} = G_0 r^{100} = 10.000 \cdot 1{,}056^{100} = 2.324.833{,}31 \text{ EUR} \quad \square$$

Po hitri, pospešeni rasti glavnice se obrestno obrestovanje pomembno razlikuje od navadnega obrestovanja. Kot smo že omenili, narašča stanje glavnice pri navadnem obrestovanju linearno, v grafičnem prikazu po premici. Stanje glavnice pri obrestnem obrestovanju pa je eksponentna funkcija časa obrestovanja, njena vrednost se giblje po eksponentni krivulji. Po prvem kapitalizacijskem obdobju se stanji glavnice po enem in drugem računu stikata v isti točki, v naslednjih obdobjih pa je rast glavnice pri obrestnem obrestovanju bistveno hitrejša od rasti glavnice pri navadnem obrestovanju. Ta razlika je dobro vidna na spodnji sliki.



Slika 3: Primerjava navadnega in obrestnega obrestovanja

Primer

Katera začetna glavnica naraste v 8 letih obrestnega obrestovanja ob letni kapitalizaciji z letno obrestno mero $p = 6$ % na 1.593,85 EUR?

Letni obrestovalni faktor je $r = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$. Iz enačbe $G_8 = G_0 r^8$ izrazimo in izračunajmo začetno glavnico.

$$G_0 = \frac{G_8}{r^8} = \frac{1.593{,}85}{1{,}06^8} = 1.000{,}00 \text{ EUR}$$

Iskana začetna glavnica je torej 1.000 EUR. □

Primer

Začetna glavnica $G_0 = 2.500$ EUR navrže v 3 letih obrestnega obrestovanja z letno kapitalizacijo 605,74 EUR obresti. Izračunajmo letno obrestno mero.

Končna vrednost glavnice je $G_3 = G_0 + o = 2.500 + 605{,}74 = 3.105{,}74$ EUR. Izračunajmo najprej ustrezni obrestovalni faktor:

$$G_3 = G_0 r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{G_3}{G_0} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G_3}{G_0}} = \sqrt[3]{\frac{3.105{,}74}{2.500}} = 1{,}074999... = 1{,}075$$

Zato je iskana obrestna mera $p = 100(r-1) = 100 \cdot (1{,}075 - 1) = 7{,}5$ %. □

Primer

Glavnica $G_0 = 1.000$ EUR je pri obrestnem obrestovanju z letno kapitalizacijo ob 7,5-odstotni letni obrestni meri narasla na 1.543,30 EUR. Koliko časa se je obrestovala?

Končno stanje glavnice je $G_n = 1.543{,}30$ EUR, pri čemer je n še neznano število let. Vzemimo osnovno enačbo obrestnega obrestovanja $G_n = G_0 r^n$ in izrazimo neznani n. Za iskanje neznanega eksponenta moramo uporabiti logaritme.

$$\log G_n = \log(G_0 r^n)$$

Upoštevajmo lastnosti logaritma.

$$\log G_n = \log G_0 + n \log r$$

Rezultat je

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log r} = \frac{\log 1.543{,}30 - \log 1.000}{1{,}075} = 5{,}99998... = 6 \text{ let.}$$

Dana glavnica se je torej obrestovala 6 let. □

Oglejmo si še ***anticipativni obrestno obrestni račun***. Naj bo G_0 začetna glavnica in π anticipativna obrestna mera. Z uporabo grških črk želimo še bolj poudariti razliko med dekurzivnim in anticipativnim računom. Obrestni meri priredimo ***anticipativni obrestovalni faktor***

$$\rho = \frac{100}{100 - \pi}.$$

Prevod obrestovalnega faktorja v obrestno mero ureja formula

$$\pi = \frac{100(\rho - 1)}{\rho}.$$

Stanje glavnice G_0 po n kapitalizacijskih obdobjih anticipativnega obrestnega obrestovanja je enako

$$G_n = G_0 \rho^n.$$

Primer
Izračunajmo stanje glavnice 1.000 EUR po 4 letih anticipativnega obrestnega obrestovanja z 9 % anticipativno letno obrestno mero. Kolikšno bi bilo stanje te glavnice, če bi obračunali obresti dekurzivno z 9 % dekurzivno letno obrestno mero?

Ker je anticipativna letna obrestna mera enaka $\pi = 9\ \%$, je anticipativni obrestovalni faktor $\rho = \frac{100}{100 - \pi} = \frac{100}{100 - 9} = 1{,}098901\ldots$ Izračunajmo končno stanje glavnice.

$$G_4 = G_0 \rho^4 = 1.000 \cdot \left(\frac{100}{100 - 9}\right)^4 = 1.458{,}26\ \text{EUR}$$

Pri dekurzivnim obračunu je končna vrednost glavnice nekoliko manjša. Če je $p = 9\ \%$, je dekurzivni obrestovalni faktor $r = 1 + \frac{9}{100} = 1{,}09$, stanje glavnice po 4 letih obrestovanja pa je

$$G_4 = G_0 r^4 = 1.000 \cdot 1{,}09^4 = 1.411{,}58\ \text{EUR.}$$

Razlika med obema stanjema je 46,68 EUR. Anticipativno obrestovanje je za kreditojemalca očitno dražje. V obeh navedenih primerih bi namreč razpolagal s 1.000 EUR gotovine, pri anticipativnem obračunu pa bi moral za odplačilo dolga odšteti večji znesek. □

Pri kapitalizacijah, ki so pogostejše od letne, uporabljamo **relativno** ali pa **konformno** obrestno mero. Naj bo *p* letna dekurzivna obrestna mera. Pri ***relativni obrestni meri*** za *m* kapitalizacij v enem letu (kapitalizacijsko obdobje je *m*-krat krajše od leta) je ta enaka

$$p_m = \frac{p}{m}$$

Relativni obrestovalni faktor je v tem primeru

$$r_m = 1 + \frac{p}{100m}.$$

Tako je na primer pri 3,6 % letni obrestni meri mesečna relativna obrestna mera enaka $p_m = \frac{3,6}{12} = 0,3$. Mesečna obrestna mera je torej 0,3 %.

Pri ***konformnem obračunu*** uporabimo ***konformni obrestovalni faktor***.

$$ {}_k r_m = \sqrt[m]{r} $$

Tako je na primer pri 5 % letni obrestni meri letni obrestovalni faktor $r = 1{,}05$ in mesečni konformni obrestovalni faktor ${}_k r_m = \sqrt[12]{1{,}05} = 1{,}00407...$

Primer

Izračunajmo stanje glavnice $G_0 = 10.000$ EUR po 7 mesecih dekurzivnega obrestnega obrestovanja z mesečno kapitalizacijo. Letna obrestna mera je $p = 9{,}6\%$. Uporabimo najprej relativno obrestno mero, nato pa konformno obrestno mero.

Mesečna relativna obrestna mera ($m = 12$) je $p_m = \frac{9{,}6}{12} = 0{,}8\%$, zato je mesečni obrestovalni faktor $r_m = 1{,}008$. Stanje glavnice po 7 mesecih obrestovanja je

$$ G_7 = G_0 {r_m}^7 = 10.000 \cdot 1{,}008^7 = 10.573{,}62 \text{ EUR.} $$

Pri dani letni obrestni meri je mesečni konformni obrestovalni faktor nekoliko manjši: ${}_k r_m = \sqrt[12]{1{,}096} = 1{,}00766...$ Zato je stanje glavnice po 7 mesecih

$$ G_7 = G_0 \cdot {}_k {r_m}^7 = 10.000 \cdot \sqrt[12]{1{,}096}^{\,7} = 10.549{,}28 \text{ EUR.} $$

□

Primer

Glavnica $G_0 = 10.000$ EUR je po 210 dneh dekurzivnega obrestnega obrestovanja ob dnevni kapitalizaciji s konformnim obračunom navrgla 475 EUR obresti. Izračunajmo letno obrestno mero (leto je neprestopno).

Ker gre za dnevno kapitalizacijo, je končno stanje glavnice po 210 dneh obrestovanja $G_{210} = 10.000 + 475 = 10.475$ EUR. Dnevni konformni obrestovalni faktor ($m = 365$) je ${}_k r_m = \sqrt[365]{r}$, pri čemer je *r* letni obrestovalni faktor. Iz enakosti $G_{210} = G_0 \cdot {}_k {r_m}^{210}$ izrazimo ${}_k r_m$ in nato izračunajmo *r*.

$$ {}_k r_m = \sqrt[210]{\frac{G_{210}}{G_0}} \quad \Rightarrow \quad r = {}_k {r_m}^{365} = \sqrt[210]{\frac{G_{210}}{G_0}}^{\,365} = \sqrt[210]{\frac{10.475}{10.000}}^{\,365} = 1{,}084 \quad \Rightarrow \quad p = 8{,}4\% $$

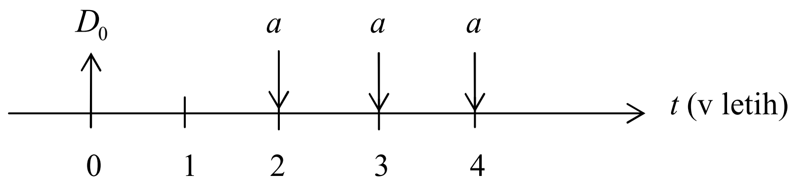
Letna obrestna mera je torej 8,4 %. □

8.2 PERIODIČNE VLOGE IN DVIGI

Naslov pokriva številne primere različnih finančnih poslov, npr. rentno varčevanje, odplačilo kredita, … Pri konkretnih izračunih se sklicujemo na princip ekvivalence glavnic: ***v vsakem trenutku posla je vsota vseh vplačil enaka vsoti vseh izplačil, pri čemer so vsa vplačila in izplačila reducirana (naobrestena ali razobrestena) na isti termin.*** Izbrani termin je najpogosteje končni termin, lahko pa tudi začetni termin.

Primer
Ilustrirajmo princip ekvivalence glavnic z naslednjim poslom. Osebni avtomobil stane 20.000 EUR. Prodajalec nam ponudi naslednji način odplačila: polovico vrednosti avtomobila plačamo ob nakupu, ostanek dolga pa poravnamo s tremi enakimi letnimi obroki, pri čemer plačamo prvi obrok dve leti po nakupu. Dekurzivna letna obrestna mera je 7 %. Kolikšni bodo letni obroki?

Ko prevzamemo avtomobil in plačamo polovico njegove vrednosti, je ostanek dolga enak $D_0 = 10.000$ EUR. Odplačali ga bomo s tremi enakimi anuitetami *a*. Prikažimo dinamiko odplačevanja na časovni premici. Ob nakupu je čas $t = 0$. V tem trenutku nam prodajalec pravzaprav izplača 10.000 EUR.



Slika 4: Odplačevanje dolga

Reducirajmo (naobrestimo) začetni dolg (izplačilo) in vsa naša vplačila na končni termin, torej na konec četrtega leta. Začetni dolg se obrestuje 4 leta, njegovo končno stanje je $D_0 r^4$. Prva anuiteta se obrestuje dve leti, njeno končno stanje je zato ar^2, druga anuiteta pa se obrestuje eno leto, njeno končno stanje je ar. Valuta zadnje anuitete je obenem končni termin posla, zato se ta anuiteta ne obrestuje. Uporabimo zdaj princip ekvivalence glavnic: vsota vseh naobrestenih vplačil je enaka vsoti vseh naobrestenih izplačil.

$$ar^2 + ar + a = D_0 r^4$$

Na levi strani enačbe izpostavimo anuiteto *a*.

$$a(r^2 + r + 1) = D_0 r^4$$

$$a = \frac{D_0 r^4}{r^2 + r + 1}$$

Letni obrestovalni faktor je $r = 1{,}07$, zato je iskana anuiteta

$$a = \frac{10.000 \cdot 1{,}07^4}{1{,}07^2 + 1{,}07 + 1} = 4.077{,}25 \text{ EUR.}$$

Kolikšne bodo obresti? Odgovor je na dlani, od vrednosti treh vplačanih anuitet odštejemo začetni dolg: $3 \cdot 4.077{,}25 - 10.000 = 2.231{,}75$ EUR. □

Vlogam, ki valutirajo na začetkih kapitalizacijskih obdobij, pravimo ***prenumerandne vloge***. Značilen primer: Varčevalec vlaga v nekem obdobju na začetku vsakega meseca enake zneske. Kolikšna je vrednost teh vlog ob koncu varčevanja? Povejmo splošno: imamo n enakih vlog (anuitet) a, ki valutirajo na začetku n kapitalizacijskih obdobij. Njihova vrednost na koncu zadnjega kapitalizacijskega obdobja je

$$S_n^{(pren)} = a\,r\,\frac{r^n - 1}{r - 1}\,.$$

Primer

Odločili smo se za varčevanje. Pet let bomo na začetku vsakega meseca vložili na bančni varčevalni račun po 100 EUR. Banka nam ponudi 6 % dekurzivno letno obrestno mero. Pri obračunu obresti bo uporabila obrestno obrestovanje z mesečno kapitalizacijo in konformnim obračunom obresti. Kolikšna bodo privarčevana sredstva na koncu petega leta?

Izračunajmo mesečni konformni obrestovalni faktor $(m = 12)$.

$$p = 6\ \% \quad \Rightarrow \quad r = 1{,}06 \quad \Rightarrow \quad {}_k r_m = \sqrt[12]{r} = \sqrt[12]{1{,}06} \approx 1{,}0049$$

Uporabimo obrazec za vsoto prenumerandnih vlog. Vlog je $n = 5 \cdot 12 = 60$.

$$S_{60}^{(pren)} = a \cdot {}_k r_m \,\frac{{}_k r_m^{\,60} - 1}{{}_k r_m - 1} = 100 \cdot \sqrt[12]{1{,}06} \cdot \frac{\sqrt[12]{1{,}06}^{\,60} - 1}{\sqrt[12]{1{,}06} - 1} = 100 \cdot \sqrt[12]{1{,}06} \cdot \frac{1{,}06^5 - 1}{\sqrt[12]{1{,}06} - 1} = 6.982{,}40 \ \text{ EUR}$$

Tolikšno bo stanje na bančnem računu po 5 letih, torej en mesec po zadnji vlogi. □

Vlogam, ki valutirajo na koncu kapitalizacijskih obdobij, pravimo ***postnumerandne vloge***. Končna vrednost n postnumerandnih enakih vlog a je

$$S_n^{(post)} = a\,\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Z razobrestenjem končne vrednosti n vlog lahko izračunamo njihovo ***sedanjo vrednost***:

za prenumerandne vloge: $S_0^{(pren)} = \dfrac{a}{r^{n-1}} \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$

in

za postnumerandne vloge: $S_0^{(post)} = \dfrac{a}{r^n} \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}.$

Lep primer za zadnji obrazec je kreditni posel, pri katerem posojilojemalec odplača dolg z n enakimi postnumerandnimi anuitetami. Količina $S_0^{(post)}$ pomeni sedanjo vrednost bodočih odplačil; z drugimi besedami: vrednost $S_0^{(post)}$ je enaka višini posojila.

Primer
Pri večjem nakupu pohištva ponudi prodajalec kupcu potrošniški kredit. Kreditni pogoji so: 12 mesečnih postnumerandnih anuitet po 103,90 EUR brez začetnega pologa, obrestno obrestovanje z 9 % letna obrestno mero, obračun mesečne obrestne mere po konformni metodi. Kolikšna je vrednost nakupa?

Izračunajmo mesečni konformni obrestovalni faktor.

$$p = 9\ \% \quad \Rightarrow \quad r = 1{,}09 \quad \Rightarrow \quad {}_k r_m = \sqrt[12]{1{,}09} \approx 1.0072$$

Vrednost nakupa je enaka sedanji vrednosti $S_0^{(post)}$ bodočih odplačil, torej:

$$S_0^{(post)} = \frac{a}{{}_k r_m^{\,12}} \cdot \frac{{}_k r_m^{\,12} - 1}{{}_k r_m - 1} = \frac{103{,}90}{\sqrt[12]{1{,}09}^{12}} \cdot \frac{\sqrt[12]{1{,}09}^{12} - 1}{\sqrt[12]{1{,}09} - 1} = \frac{103{,}90}{1{,}09} \cdot \frac{1{,}09 - 1}{\sqrt[12]{1{,}09} - 1} = 1.190{,}30\ \text{EUR}.$$

Vrednost nabavljenega pohištva je 1.190,30 EUR. □

Amortizacija kredita je odplačevanje kredita. Obrok, s katerim odplačujemo (amortiziramo) posojilo, je ***anuiteta***. Vsebuje dva dela: razdolžnino in obresti.

anuiteta = razdolžnina + obresti.

Obresti se obračunajo za obdobje med dvema zaporednima anuitetama; osnova za obračun obresti je ostanek dolga po plačilu prejšnje anuitete. ***Razdolžnina*** je dejansko zmanjšanje dolga po plačilu anuitete, ohlapno rečeno »neto odplačilo dolga«.

V poslovanju sta v veljavi predvsem dva načina amortizacije kredita: princip enakih razdolžnin in princip enakih anuitet.

Pri amortizaciji kredita po ***principu enakih razdolžnin (obročni način)*** odplačamo dolg D_0 z n postnumerandnimi anuitetami, pri čemer so razdolžnine enake. Fiksna razdolžnina je zato

$$Q = \frac{D_0}{n},$$

znesek obresti pa se seveda z vsaki odplačilom zmanjšuje, saj se z vsakim odplačilom zmanjšuje tudi dolg.

Primer
Dolg v višini 20.000 EUR bomo odplačali s štirimi letnimi postnumerandnimi zneski. Kreditni pogoji so: dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo, anuitete so izračunane po principu enakih razdolžnin, letna obrestna mera je 8 %. Sestavimo amortizacijski načrt.

Dolg $D_0 = 20.000$ EUR bomo odplačali s 4 anuitetami, zato je fiksna razdolžnina

$$Q = \frac{D_0}{4} = \frac{20.000}{4} = 5.000 \text{ EUR.}$$

Ob koncu prvega leta odplačevanja kredita moramo poravnati letne obresti in razdolžnino. Glavnica $D_0 = 20.000$ EUR navrže v enem letu obresti v višini

$$o_1 = \frac{D_0 p}{100} = \frac{20.000 \cdot 8}{100} = 1.600 \text{ EUR,}$$

zato je prva anuiteta enaka

$$a_1 = Q + o_1 = 5.000 + 1.600 = 6.600 \text{ EUR.}$$

Naš dolg se je zmanjšal za 5.000 EUR, dolgujemo torej še

$$D_1 = D_0 - Q = 20.000 - 5.000 = 15.000 \text{ EUR.}$$

Obresti od te glavnice so ob koncu drugega leta enake

$$o_2 = \frac{D_1 p}{100} = \frac{15.000 \cdot 8}{100} = 1.200 \text{ EUR,}$$

zato je druga anuiteta enaka

$$a_2 = Q + o_2 = 5.000 + 1.200 = 6.200 \text{ EUR.}$$

Dolgujemo še

$$D_2 = D_1 - Q = 15.000 - 5.000 = 10.000 \text{ EUR.}$$

S tem zaporedjem računskih korakov izračunamo anuitete a_i, tekoče zneske obresti o_i in trenutna stanja dolga D_i, pri čemer je $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Izračunane zneske uredimo v preglednico – v t. i. ***amortizacijski načrt***.

Tabela 3: Amortizacijski načrt, princip enakih razdolžnin

Leto	a_i	o_i	Q_i	D_i
0	-	-	-	20.000
1	6.600	1.600	5.000	15.000
2	6.200	1.200	5.000	10.000
3	5.800	800	5.000	5.000
4	5.400	400	5. 000	0
Σ	24.000	4.000	20.000	-

Ker moramo kredit odplačati v 4 letih, mora biti zadnje stanje dolga $D_4 = 0$. Vsota vseh anuitet pa mora biti seveda enaka seštevku vseh obresti in vseh razdolžnin.

V amortizacijskem načrtu je tudi lepo razvidna dinamika odplačil. Z vsako anuiteto se zmanjšuje dolgovani znesek, zato se seveda zmanjšujejo tudi zneski letnih obresti. Ob fiksni razdolžnini se zato zmanjšujejo tudi anuitete. □

Pri amortizaciji po ***principu enakih anuitet*** odplačamo dolg D_0 z n enakimi postnumerandnimi anuitetami.

$$a = \frac{D_0 r^n (r-1)}{r^n - 1}$$

Z manjšanjem dolga se znotraj fiksne anuitete zneski obresti zmanjšujejo, vzporedno s tem pa se zato seveda povečujejo zneski razdolžnin.

Primer

Vzemimo iste izhodiščne podatke, kot v zgornjem primeru, spremenimo pa kreditne pogoje. Dolg v višini 20.000 EUR bomo odplačali s štirimi enakimi letnimi postnumerandnimi anuitetami. Kreditni pogoji so: dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo, 8 % letna obrestna mera. Sestavimo amortizacijski načrt.

Začetno stanje dolga je $D_0 = 20.000$, obrestovalni faktor je $r = 1{,}08$. Izračunajmo fiksno anuiteto.

$$a = \frac{D_0 r^n (r-1)}{r^n - 1} = \frac{20.000 \cdot 1{,}08^4 (1{,}08 - 1)}{1{,}08^4 - 1} = 6.038{,}42 \text{ EUR}$$

Po prvem letu navrže dolgovani znesek $D_0 = 20.000$ EUR obresti v višini

$$o_1 = \frac{D_0 p}{100} = \frac{20.000 \cdot 8}{100} = 1.600 \text{ EUR.}$$

Ta znesek poravnamo z delom prve anuitete, drugi del anuitete pa predstavlja razdolžnino

$$Q_1 = a - o_1 = 6.038{,}42 - 1.600 = 4.438{,}42 \text{ EUR.}$$

Naš dolg se je zmanjšal za 4.438,42 EUR, dolgujemo torej še

$$D_1 = D_0 - Q_1 = 20.000 - 4.438{,}42 = 15.561{,}58 \text{ EUR.}$$

Ob koncu drugega leta plačamo obresti od te glavnice.

$$o_2 = \frac{D_1 p}{100} = \frac{15.561{,}58 \cdot 8}{100} = 1.244{,}93 \text{ EUR}$$

Za razdolžnino ostane

$$Q_2 = a - o_2 = 6.038{,}42 - 1.244{,}93 = 4.793{,}49 \text{ EUR,}$$

dolg se je zmanjšal na

$$D_2 = D_1 - Q_2 = 15.561{,}58 - 4.793{,}49 = 10.768{,}09 \text{ EUR.}$$

Naslednje korake vpišimo neposredno v amortizacijski načrt.

Tabela 4: Amortizacijski načrt, princip enakih anuitet

Leto	a_i	o_i	Q_i	D_i
0	-	-	-	20.000,00
1	6.038,42	1.600,00	4.438,42	15.561,58
2	6.038,42	1.244,93	4.793,49	10.768,09
3	6.038,42	861,45	5.176,97	5.591,12
4	6.038,42	447,29	5.591,13	-0,01
Σ	24.153,68	4.153,67	20.000,00	-

Zaradi zaokroževanja zneskov smo dolgovani znesek preplačali za 0,01 EUR, zato bi moral posojilodajalec zadnjo anuiteto zmanjšati na 6.038,41 EUR.

Tudi v tej tabeli je razvidna dinamika odplačil. Ker se dolgovani znesek zmanjšuje, se zmanjšujejo tudi dolgovane obresti. Ob fiksni anuiteti zato narašča zaporedje razdolžnin. □

Izračunano fiksno anuiteto v praksi pogosto zaokrožimo na bližnjo celoštevilsko vrednost. Morebitna preplačila ali premajhna odplačila pa izravnamo z zadnjo anuiteto. Pravimo ji ***izravnalna anuiteta***. Oglejmo si primer.

Primer

Vzemimo iste izhodiščne podatke, kot v zgornjem primeru. Dolg 20.000 EUR bomo odplačali v štirih letih z letnimi postnumerandnimi anuitetami. Kreditni pogoji so: dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo, 8 % letna obrestna mera. Z obrazcem izračunano fiksno anuiteto 6.038,42 EUR zaokrožimo na 6.038 EUR. Kredit bomo torej odplačali s tremi anuitetami po 6.038 EUR, četrta anuiteta pa bo izravnalna. Sestavimo amortizacijaki načrt.

Tabela 5: Amortizacijski načrt, princip enakih anuitet z izravnalno anuiteto

Leto	a_i	o_i	Q_i	D_i
0	-	-	-	20.000,00
1	6.038,00	1.600,00	4.438,00	15.562,00
2	6.038,00	1.244,96	4.793,04	10.768,96
3	6.038,00	861,52	5.176,48	5.592,48
4	6.039,88	447,40	5.592,48	0
Σ	24.153,88	4.153,88	20.000,00	-

Razložimo izračun izravnalne anuitete a_4. Ostanek dolga po treh letih odplačevanja je $D_3 = 5.592{,}48$ EUR, zato je tolikšna tudi zadnja razdolžnina Q_4. Obresti, ki jih v zadnjem letu navrže ta glavnica, znašajo

$$o_4 = \frac{D_3 p}{100} = \frac{5.592{,}48 \cdot 8}{100} = 447{,}40 \text{ EUR.}$$

Z zadnjo anuiteto moramo poplačati ta znesek in ostanek dolga, zato je izravnalna anuiteta enaka

$$a_4 = o_4 + Q_4 = 447{,}40 + 5.592{,}48 = 6.039{,}88 \text{ EUR.}$$ □

Sklep
Izračunati znamo končno stanje glavnice, njeno začetno stanje, čas obrestovanja in neznano obrestno mero. Znotraj kapitalizacijskega obdobja znamo uporabiti relativno in konformno obrestno mero. Vse navedeno znamo obdelati pri dekurzivnem in pri anticipativnem računu. Izračunati znamo končno stanje periodičnih vlog in anuitete kredita ter sestaviti podroben amortizacijski načrt odplačevanja kredita.

***

NALOGE

8.1. Kolikšen znesek moramo vložiti danes, da bomo lahko čez 3 leta dvignili 1.978,39 EUR? Pogoji so: obrestna mera 3,2 % p.a., dekurzivno obrestno obrestovanje, letna kapitalizacija.

8.2. Vloga 2.400 EUR je v 5 letih dekurzivnega obrestnega obrestovanja pri letni kapitalizaciji prinesla 548,15 EUR obresti. S kolikšno letno obrestno mero se je obrestovala?

8.3. Koliko časa se je obrestovala glavnica 5.000 EUR, če je pri 4,5 % letni obrestni meri narasla na 6.804,31 EUR (dekurzivno obrestno obrestovanje, letna kapitalizacija)?

8.4. V kolikšnem času se vloge pri 14,9 % letni obrestni meri podvojijo (dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo)?

8.5. V kolikšnem času se vloge pri 10,5 % letni obrestni meri potrojijo (dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo)?

8.6. V kolikšnem času se vloge podvojijo pri dekurzivnem obrestnem obrestovanju z letno kapitalizacijo pri 6 % (8 %, 9 %, 12 %) letni obrestni meri. Ugotovite približno zvezo med obrestno mero (v odstotkih) in podvojitvenim časom (v letih) – v bančništvu ji pravijo "pravilo 72".

8.7. Izposodimo si 7.500 EUR, letna obrestna mera je 5,4 %, kapitalizacija je letna. Koliko moramo vrniti čez 3 leta:
  a) pri dekurzivnem obrestnem obrestovanju,
  b) pri anticipativnem obrestnem obrestovanju?

8.8. Zadolžili smo se za 20.000 EUR in dolg čez 4 leta poravnali z zneskom 24.554,75 EUR. Pogoji obrestovanja so: obrestnoobrestni račun, letna kapitalizacija. Izračunajte letno obrestno mero pri:
  a) dekurzivnem obrestovanju,
  b) anticipativnem obrestovanju?

8.9. Dolg 4.200 EUR smo pri 6 % anticipativni letni obrestni meri poravnali z zneskom 5.722,82 EUR. Pogoji obrestovanja so: obrestno obrestovanje, letna kapitalizacija. Koliko časa je minilo od zadolžitve do vračila?

8.10. Izračunajte stanje vloge 1.500 EUR po 8 mesecih dekurzivnega obrestnega obrestovanja. Letna obrestna mera je 2,4 %, kapitalizacija je mesečna z relativno obrestno mero.

8.11. Primerjajte stanje vloge 1.000 EUR po 2 letih dekurzivnega obrestnega obrestovanja pri letni obrestni meri 8 %, če je kapitalizacija: a) letna, b) polletna, c) četrtletna. Pri vprašanjih b) in c) uporabite relativno obrestno mero.

8.12. Zadolžili smo se za 2.000 EUR. Koliko moramo vrniti po 130 dneh, če je letna obrestna mera 5,6 % (dekurzivni obrestnoobrestni račun, konformni obračun obresti, neprestopno leto)?

8.13. Enaindvajsetega marca 2008 smo vložili 50.000 EUR. Letne obrestne mere so: v marcu 3,0 %, v aprilu 3,1 % in v maju 3,2 %. Izračunajte končno stanje vloge 15. maja 2008. Pogoji obrestovanja: dekurzivni obrestnoobrestni račun, konformni obračun obresti, prvega dne posla ne štejemo v čas trajanja, zadnji dan štejemo.

8.14. Dolg 1.000 EUR bi morali poplačati 15. marca 2007. Plačali smo ga 15. maja 2007. Izračunajte zamudne obresti. Letna obrestna mera za zamudne obresti 11,5 %. Pogoji obrestovanja so: obrestnoobrestni račun, konformni obračun obresti, prvi dan šteje v čas obrestovanja, zadnji dan pa ne.
Izračunajte zamudne obresti še s programom na spletni strani IUS-software in s finančnimi podatki Banke Slovenije. Spletni naslov za izračun zamudnih obresti: ***www.ius-software.si****. Spletni naslov Banke Slovenije:* ***www.bsi.si****, finančni podatki, temeljna in zamudna obrestna mera.*
Program IUS-software dopušča tudi izračun zamudnih obresti z navadnim obrestovanjem (imenujejo ga linearni način). Izračunajte zamudne obresti pri istih vhodnih podatkih še na ta način.

8.15. Štiri leta vlagamo na začetku vsakega meseca 100 EUR. Letna obrestna mera je 4,8 %, dekurzivno obrestno obrestovanje. Izračunajte končno stanje kapitala en mesec po zadnji vlogi:
   a) pri mesečni kapitalizaciji s konformno obrestno mero,
   b) pri mesečni kapitalizaciji z relativno obrestno mero.

8.16. Kolikšna je sedanja vrednost štirih letnih postnumerandnih zneskov po 1.000 EUR, če je letna obrestna mera 4,25 % pri dekurzivnem obrestnem obrestovanju z letno kapitalizacijo?

8.17. Kolikšen znesek moramo vložiti danes, da lahko dobivamo 6 let ob koncu meseca rento v višini 100 EUR. Letna obrestna mera 4,1 %, dekurzivno obrestno obrestovanje, mesečna kapitalizacija s konformno obrestno mero.

8.18. Kredit 9.000 EUR za nakup avtomobila bomo odplačali v 5 letih z enakimi mesečnimi postnumerandnimi obroki. Letna obrestna mera je 5,2 %, dekurzivno obrestno obrestovanje, mesečna kapitalizacija s konformno obrestno mero. Kolikšni bodo mesečni obroki?

8.19. Dolgoročni kredit 56.000 EUR bomo odplačali s štirimi letnimi postnumerandnimi zneski, obračunanimi po principu enakih razdolžnin. Letna obrestna mera je 4,5 %, dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo. Sestavite amortizacijski načrt.

8.20. Dolgoročni kredit 56.000 EUR bomo odplačali s štirimi letnimi postnumerandnimi zneski, obračunanimi po principu enakih anuitet. Letna obrestna mera je 4,5 %, dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo. Sestavite amortizacijski načrt.

8.21. Dolgoročni kredit 56.000 EUR bomo odplačali s tremi enakimi letnimi postnumerandnimi zneski po 16.000 EUR, četrta anuiteta bo izravnalna. Letna obrestna mera je 4,5 %, dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo. Sestavite amortizacijski načrt.

8.22. Dolg 20.000 EUR bomo poravnali s petimi enakimi letnimi postnumerandnimi anuitetami po 4.000 EUR, šesta anuiteta bo izravnalna. Letna obrestna mera je 4 %, dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo. Sestavite amortizacijski načrt.

8.23. V banko vložimo 4.000 EUR. Vlogo izčrpamo s štirimi enakimi zaporednimi letnimi dvigi, prvi dvig nastopi 3 leta po vlogi. Letna obrestna mera 3,70 %, dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo. Kolikšni so letni dvigi?

8.24. Stanovanjski kredit 50.000 EUR bomo poplačali s 120 mesečnimi postnumerandnimi anuitetami. Kreditni pogoji so: obrestna mera 4,8 % p.a., dekurzivno obrestno obrestovanje z mesečno kapitalizacijo. Izračunajte anuiteto:

a) če valutira prva anuiteta 1 mesec po najemu kredita,
b) če nam banka odobri enoletni odlog odplačevanja kredita – prva anuiteta valutira torej 13 mesecev po najemu kredita.

Oba izračuna izpeljite z relativno in s konformno obrestno mero.

8.25. Štirikrat zapored vložimo na začetku leta po 3.000 EUR. Tri leta po zadnji vlogi začnemo kapital izčrpavati s petimi enakimi letnimi dvigi. Letna obrestna mera je enaka 5,25 %, dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo. Kolikšni so dvigi?

9 STATISTIČNO RAZISKOVANJE

Kratko poglavje je preprost uvod v kompleksno znanstveno disciplino – statistiko. Opredelimo njene cilje in definiramo temeljne pojme.

Statistika raziskuje množične pojave. Množica objektov (živih bitij, predmetov, dogodkov itn.), ki jo proučuje, je ***populacija*** ali ***statistična množica***. Populacija mora biti krajevno, časovno in vsebinsko natančno opredeljena. Posamezen element populacije je ***statistična enota***, npr. prebivalec, rojstvo, poroka, prometna nesreča. ***Statistična spremenljivka*** je opazovana lastnost statistične enote, npr. spol prebivalca, telesna teža novorojenca, starost mladoporočenca, število žrtev prometne nesreče itn. ***Statistični parametri*** pa opredeljujejo celotno populacijo, so značilnosti populacije, npr. povprečni dohodek zaposlenih v gospodarski družbi, stopnja rasti prebivalstva, povprečna telesna teža prebivalstva.

Statistične spremenljivke so opisne (atributivne) ali številske (numerične). Vrednosti ***opisne spremenljivke*** so opredeljene z besedo, npr. spol, kraj rojstva, zakonski stan. Vrednosti ***številske spremenljivke*** pa so opredeljene z realnimi števili, npr. telesna teža, mesečni dohodek gospodinjstva.

Številske spremenljivke delimo naprej na zvezne in diskretne (nezvezne). ***Zvezna spremenljivka*** lahko zavzame (vsaj načelno) poljubno vrednost iz nekega intervala realnih števil, npr. telesna višina. ***Diskretna (nezvezna) spremenljivka*** pa zavzame samo določene izolirane, običajno celoštevilske vrednosti, npr. število otrok v družini.

Statistična opazovanja so ***popolna***, če zberemo podatke za vse enote populacije, ali ***delna***, če zberemo podatke samo na neki podmnožici populacije, tj. na ***vzorcu***. Če je vzorec izbran tako, da lahko iz njegovih lastnosti z veliko zanesljivostjo sklepamo na lastnosti populacije, je izbrani vzorec ***relevanten***. Če je za vse elemente populacije enako verjetno, da bodo izbrani v vzorec, je izbrani vzorec ***slučajen***.

Primer
Obravnavajmo popis prebivalstva. Populacijo sestavljajo vsi prebivalci države, statistična enota je posamezni prebivalec. Populacija je krajevno opredeljena z geografskimi mejami države, časovno pa z dnem in uro popisa.

Oglejmo si nekaj demografskih značilnosti populacije. Spol, zakonski stan, starost in število živorojenih otrok (samo za ženski del populacije) so lastnosti prebivalca, torej so statistične spremenljivke. Spol prebivalca ima samo dve vrednosti, ki sta izraženi opisno: moški in ženski. Zakonski stan ima prav tako le dve vrednosti: poročen in samski. Ti dve spremenljivki sta torej opisni. Starost prebivalca je izražena s številom, zato je številska spremenljivka. Zavzame lahko vse vrednosti z intervala od 0 do 100 let (npr. starost 36,5 let), zato gre za zvezno spremenljivko. Število živorojenih otrok je številska spremenljivka, ki zavzame le celoštevilske vrednosti od 0 do 10 (morda tudi več), torej gre za diskretno spremenljivko.
□

Sklep
Temeljni pojmi statistike so opredeljeni. Bralec naj z reševanjem spodnjih nalog preizkusi svoj spomin.

***

NALOGE

9.1. Dana je ***enostavna (enorazsežna) tabela*** – opisuje eno spremenljivko, vsebuje eno statistično vrsto.

Tabela 6: Prihodi turistov v Republiko Slovenijo leta 2007 po vrstah krajev

Vrsta kraja	Število turistov v 1.000
Glavno mesto Ljubljana	372,2
Zdraviliški kraji	632,5
Obmorski kraji	545,5
Gorski kraji	663,3
Drugi turistični kraji	434,1
Drugi kraji	33,6
Skupaj	2.681,2

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Vprašanja:

- Kaj je v tem primeru statistična populacija, kaj je statistična enota?
- Kaj je opazovana statistična spremenljivka?
- Za katero vrsto statistične spremenljivke gre (atributivno, numerično)?
- Katere vrednosti zavzame opazovana statistična spremenljivka?

9.2. Dana je ***sestavljena tabela*** – opisuje eno spremenljivko, vsebuje več statističnih vrst.

Tabela 7: Prihodi in prenočitve turistov v Republiki Sloveniji leta 2007 po vrstah krajev

Vrsta kraja	Število turistov v 1.000	Prenočitve v 1.000
Glavno mesto Ljubljana	372,2	707,3
Zdraviliški kraji	632,5	2.651,2
Obmorski kraji	545,5	1.992,6
Gorski kraji	663,3	1.946,6
Drugi turistični kraji	434,1	895,2
Drugi kraji	33,6	68,4
Skupaj	2.681,2	8.261,3

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Vprašanja:

- Kaj je v teh primerih statistična populacija, kaj je statistična enota?
- Kaj je opazovana statistična spremenljivka?
- Za katero vrsto statistične spremenljivke gre (atributivno, numerično)?
- Katere vrednosti zavzame opazovana statistična spremenljivka?

9.3. Dana je ***kombinacijska (večrazsežna) tabela*** **–** opisuje več spremenljivk.

Tabela 8: Prihodi turistov v Republiko Slovenijo leta 2007 po vrstah krajev in vrsti gosta

	Vrsta gosta		v 1.000
Vrsta kraja	Skupaj	Tuji	Domači
Glavno mesto Ljubljana	372,2	353,8	18,4
Zdraviliški kraji	632,5	266,0	366,5
Obmorski kraji	545,5	305,2	240,3
Gorski kraji	663,3	459,4	203,9
Drugi turistični kraji	434,1	341,7	92,4
Drugi kraji	33,6	25,3	8,3
Skupaj	2.681,2	1.751,4	929,8

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Vprašanja:

- Kaj je v tem primeru statistična populacija, kaj je statistična enota?
- Kaj so opazovane statistične spremenljivke?
- Za katero vrsto statističnih spremenljivk gre (atributivno, numerično)?
- Katere vrednosti zavzamejo opazovane statistične spremenljivke?

9.4. Tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev (razrez opazovane množice na razrede) prodajaln po vrednosti mesečnega prometa. Frekvence razredov f_j v desnem stolpcu predstavljajo število trgovin, ki sodijo v dani razred.

Tabela 9: Frekvenčna porazdelitev prodajaln po vrednosti mesečnega prometa

Vrednost mesečnega prometa v 1.000 EUR	f_j
od 100 do pod 200	10
od 200 do pod 300	15
od 300 do pod 400	16
od 400 do pod 500	25
od 500 do pod 600	32
od 600 do pod 700	20
od 700 do pod 800	8
od 800 do pod 900	2
Skupaj	$N = 128$

Vprašanja:

- Kaj je v tem primeru statistična populacija, kaj je statistična enota?
- Kaj je opazovana statistična spremenljivka?
- Za katero vrsto statistične spremenljivke gre (atributivno, numerično, zvezno, diskretno)?
- Katere vrednosti zavzame opazovana statistična spremenljivka?

9.5. Tabela prikazuje ocene 180 študentov pri pisnem izpitu.

Tabela 10: Frekvenčna porazdelitev ocen 180 študentov pri pisnem izpitu

Ocena y_j	Št. študentov f_j
5	2
6	24
7	60
8	64
9	24
10	6
Skupaj	180

Vprašanja:

- Kaj je v tem primeru statistična populacija, kaj je statistična enota?
- Kaj je opazovana statistična spremenljivka?
- Za katero vrsto statistične spremenljivke gre (atributivna, numerična, zvezna, diskretna)?
- Katere vrednosti zavzame opazovana statistična spremenljivka?

9.5.

10 RELATIVNA ŠTEVILA

Kako nazorno prikazati strukturo zaposlenih po spolu ali glede na njihove osebne dohodke? Kako primerjati socialni status prebivalstva dveh ali več občin? Kako plastično prikazati rast dobička podjetja v daljšem časovnem obdobju? V tem poglavju bo bralec našel odgovore na ta in podobna vprašanja.

10.1 STRUKTURE

Strukture prikazujejo razmerje med delom in celoto nekega pojava, predstavijo notranjo zgradbo opazovane statistične populacije glede na vrednosti ene ali več statističnih spremenljivk.

Primer
V letu 2006 se je v Sloveniji rodilo 18.932 živorojenih otrok, 9.762 dečkov in 9.170 deklic (SURS, Statistični letopis 2007). Predstavimo strukturo populacije živorojenih otrok glede na novorojenčev spol.

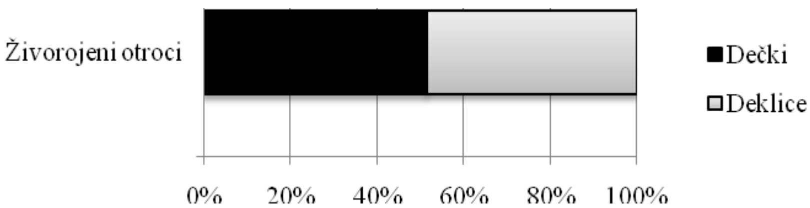
Delež dečkov je enak $\frac{9.762}{18.932} = 0{,}5156$, v odstotkih 51,56 %.

Delež deklic je enak $\frac{9.170}{18.932} = 0{,}4844$, v odstotkih 48,44 %.

Vsota deležev pomeni celotno populacijo, zato je seveda enaka 1, vsota ustreznih odstotkov pa je enaka 100 %. □

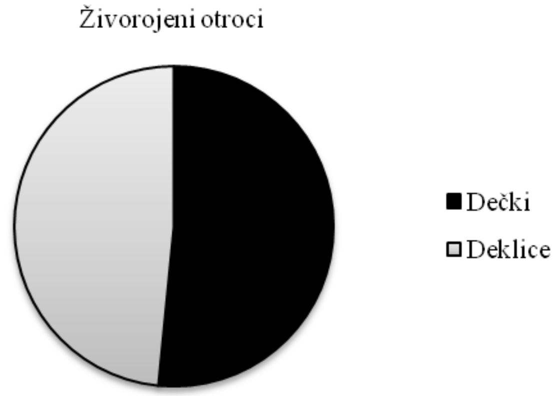
Strukturo populacije lahko nazorno prikažemo npr. s paličnim ali pa s tortnim diagramom.

Pri ***paličnem diagramu*** prikažemo opazovano populacijo s pravokotnikom. Vsaki podmnožici populacije pripada manjši, ustrezno pobarvan pravokotnik. Njegova ploščina (oziroma dolžina vodoravne stranice) je premo sorazmerna relativnemu deležu te podmnožice v celotni populaciji. Uporabimo zgornji primer strukture živorojenih otrok v Sloveniji v letu 2006.



Slika 5: Struktura živorojenih otrok v Sloveniji v letu 2006
Vir: Statistični letopis Slovenije, 2006

Pri ***tortnem diagramu*** prikažemo opazovano populacijo s krogom. Vsaki podmnožici populacije pripada ustrezno pobarvan krožni izsek. Njegova ploščina (oziroma velikost središčnega kota) pa je premo sorazmerna relativnemu deležu te podmnožice v celotni populaciji. Uporabimo spet zgornji primer.



Slika 6: Struktura živorojenih otrok v Sloveniji v letu 2006
Vir: Statistični letopis Slovenije, 2006

Posplošimo zgornji primer. Naj bo Y število enot v populaciji oziroma podatek za celoto opazovanega pojava, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ pa naj bodo števila enot v delih populacije oziroma podatki za dele pojava. Vsota delov je seveda enaka celoti: $Y_1 + Y_2 + \ldots, +Y_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j = Y$. Definirajmo:

Strukturni delež je razmerje med delom in celoto: $P_j = \frac{Y_j}{Y}$.

Strukturni odstotek je razmerje med delom in celoto, izraženo v odstotkih: $P_j \ \% = \frac{Y_j}{Y} \cdot 100.$

Strukturni odtisoček je razmerje med delom in celoto, izraženo v promilih: $P_j \ ‰ = \frac{Y_j}{Y} \cdot 1000.$

Veljajo enakosti: $\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$, $\sum_{j=1}^{n} P_j \ \% = 100$ in $\sum_{j=1}^{n} \ P_j \ ‰ = 1000.$

10.2 STATISTIČNI KOEFICIENTI

Statistični koeficient je razmerje med dvema raznovrstnima podatkoma, ki sta vsebinsko povezana, tako da je njuna primerjava smiselna (v nekaterih primerih gre lahko tudi za istovrstna podatka). Primerjana podatka se morata nanašati na isti trenutek oziroma na isti časovni interval.

Zgradba statističnega koeficienta je zelo preprosta. Naj bosta X in Y vsebinsko povezana podatka. ***Statistični koeficient*** K je njuno razmerje.

$$K = \frac{Y}{X}$$

Z istima podatkoma lahko sestavimo še obratno vrednost zgornjega koeficienta, tj. ***recipročni koeficient***.

$$K_r = \frac{X}{Y} = \frac{1}{K}$$

Primer

Popis prebivalstva iz l. 2002 kaže, da je bilo v Sloveniji takrat 1.964.036 prebivalcev in 684.847 gospodinjstev. Če delimo število prebivalcev s številom gospodinjstev, dobimo povprečno velikost zasebnega gospodinjstva, tj. povprečno število oseb na gospodinjstvo:

$$K = \frac{1.964.036}{684.847} = 2{,}9 \text{ oseb na gospodinjstvo.}$$

Recipročni koeficient pove povprečno število gospodinjstev na prebivalca

$$K_r = \frac{684.847}{1.964.036} = 0{,}3487 \text{ gospodinjstev na prebivalca.}$$

Vsebino tega koeficienta lahko predstavimo slikovito, če njegovo vrednost razširimo na 1.000 prebivalcev.

$$K_r = 0{,}3487 = 348{,}7 \text{ gospodinjstev na 1.000 prebivalcev.}$$ □

Pri primerjavi istovrstnih podatkov običajno pomnožimo njuno razmerje s 100. Tako ravnamo na primer pri izračunu ***koeficienta pokritosti uvoza z izvozom***. Če označimo z I vrednost izvoza, z U pa vrednost uvoza v opazovanem obdobju, je ta koeficient enak

$$K = \frac{I}{U} \cdot 100$$

Primer

Vrednost slovenskega izvoza v letu 2007 je znašala 26.552.514 tisoč USD, vrednost uvoza pa 29.480.499 tisoč USD. Izračunajmo koeficient pokritosti uvoza z izvozom.

$$K_{2007} = \frac{26.552.514.000 \text{ USD}}{29.480.499.000 \text{ USD}} \cdot 100 = 90$$

Izračunani koeficient pove, da je slovenski izvoz v tem letu za 10 % zaostajal za uvozom. □

Oglejmo si še ***koeficient obračanja zalog***. Ta koeficient je enak razmerju med vrednostjo prodaje v opazovanem obdobju in povprečnim stanjem oziroma vrednostjo zalog. Pove, kolikokrat se v tem obdobju obrnejo (izčrpajo in znova zapolnijo) zaloge blaga. Naj bo Y vrednost prodaje in $\overline{X}$ povprečno stanje zalog. Koeficient obračanja zalog je tedaj enak

$$K = \frac{Y}{\overline{X}}$$

Vrednost prodaje je ***intervalni podatek***, nanaša se na daljše časovno obdobje (npr. leto). Stanje zalog pa je ***momentni podatek***, zajemamo ga v izbranih trenutkih (npr. enkrat mesečno). Kako izračunati povprečno stanje zalog? Če zajemamo podatke o stanju zalog na sredinah N podobdobij, imamo N podatkov $X_1, X_2, \ldots, X_N$ o zalogah. Povprečno stanje zalog je tedaj enako njihovemu povprečju.

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_N\right)$$

Če pa zajemamo podatke na začetku oziroma koncu N podobdobij, imamo $N+1$ podatkov $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_N$ o stanju zalog. Tedaj izračunamo najprej povprečja za posamezna podobdobja, iz teh povprečij pa povprečje za celotno obdobje.

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\left(\frac{X_0 + X_1}{2} + \frac{X_1 + X_2}{2} + \cdots + \frac{X_{N-1} + X_N}{2}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{X_0}{2} + X_1 + X_2 + \cdots + X_{N-1} + \frac{X_n}{2}\right)$$

Recipročni koeficient koeficienta obračanja zalog

$$K_r = \frac{\overline{X}}{Y} = \frac{1}{K}$$

pove povprečno ***dolžino trajanja enega obrata zalog***. Preprost zgled: če se zaloge v povprečju obrnejo 6-krat letno, nam recipročni koeficient $K_r = \frac{1}{6}$ pove, da je povprečna dolžina trajanja enega obrata zalog enaka $\frac{1}{6}$ leta, torej 2 mesecema.

Primer

Spodnja tabela vsebuje podatke o prometu trgovskega podjetja v prvem trimesečju in o stanju zalog na začetku vsakega meseca. Izračunajmo koeficient obračanja zalog v tem trimesečju in povprečno dolžino trajanja enega obrata zalog.

Tabela 11: Promet in stanje zalog v prvem trimesečju

Mesec	Zaloge na začetku meseca v 1.000 EUR	Promet v 1.000 EUR
Januar	300	521
Februar	290	550
Marec	330	495
April	350	-

Skupni promet v prvem trimesečju znaša (rezultati so zapisani v 1.000 EUR)

$$Y = 521 + 550 + 495 = 1.566$$

Povprečno stanje zalog izračunamo po drugem obrazcu (štirje podatki za tri podobdobja).

$$\overline{X} = \frac{1}{3}\left(\frac{300}{2} + 290 + 330 + \frac{350}{2}\right) = 315$$

Koeficient obračanja zalog je tedaj enak

$$K = \frac{1.566}{315} = 4{,}97$$

Zaloge se v povprečju obrnejo skoraj petkrat v trimesečju. Recipročni koeficient

$$K_r = \frac{1}{4{,}97} = 0{,}20$$

pa pove, da je dolžina trajanja enega obrata zalog približno $0{,}20 \cdot 3$ meseci, torej $0{,}20 \cdot 90$ dni $= 18$ dni. □

10.3 INDEKSI, KAZALCI RASTI

Indeks je razmerje med dvema istovrstnima podatkoma, pomnoženo s faktorjem 100. Podatka, ki ju primerjamo, govorita o vrednosti nekega pojava v različnih trenutkih, v različnih časovnih intervalih (***časovni indeks***) ali pa o vrednostih nekega pojava na različnih geografskih področjih (***krajevni indeks***). Enega od podatkov izberemo za izhodišče primerjave. Ta podatek gre v imenovalec ustreznega ulomka,. faktor 100 pa poskrbi, da je razmerje izraženo v odstotkih.

Primer
Primerjajmo letošnji in lanski izvoz. Letošnji izvoz znaša 82 mio USD, lanski je znašal 80 mio USD. Za osnovo je smiselno izbrati lanski podatek, ustrezni indeks bo tedaj izrazil dinamiko izvoza. Izračunajmo indeks I.

$$I = \frac{82 \text{ mio USD}}{80 \text{ mio USD}} \cdot 100 = 102{,}5$$

Izračunani indeks pove, da predstavlja letošnji izvoz 102,5 % lanskega ali − povedano drugače − letošnji izvoz je za 2,5 % presegel lanskega. □

Posvetimo se ***časovnim indeksom***. Vrednosti opazovanega pojava (vrednosti statistične spremenljivke) zajemamo v zaporednih časovnih trenutkih ali zaporednih časovnih intervalih. Zaporedju tako pridobljenih podatkov pravimo ***časovna vrsta***. Če vzamemo pri izračunu indeksov za izhodišče vedno isti podatek vrste, dobimo ***indekse s stalno osnovo***. Če pa se osnova za primerjavo spreminja, dobimo ***indekse s premično osnovo***.

Naj bo $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ časovna vrsta zbranih podatkov. Vzemimo za izhodišče začetni podatek Y_0. Tedaj dobimo zaporedje ***indeksov s stalno osnovo*** ali ***baznih indeksov***.

$$I_{k/0} = \frac{Y_k}{Y_0} \cdot 100, \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Primer

Spodnja tabela prikazuje število prenočitev turistov v Sloveniji v obdobju 2000–2007. Izračunajmo bazne indekse z osnovo v letu 2000.

Tabela 12: Število prenočitev turistov v Sloveniji, indeksi s stalno osnovo

Leto	Število prenočitev turistov v 1000	Indeksi s stalno osnovo (bazno leto 2000)
2000	6.719	100
2001	7.130	106,1
2002	7.321	109,0
2003	7.503	111,7
2004	7.589	112,9
2005	7.572	112,7
2006	7.722	114,9
2007	8.261	122,9

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2007 in 2008

Za ilustracijo zapišimo izračun baznega indeksa za leto 2003 (oznake podatkov in indeksov naj bodo kar ustrezne letnice).

$$I_{2003/2000} = \frac{Y_{2003}}{Y_{2000}} \cdot 100 = \frac{7.503}{6.719} \cdot 100 = 111{,}7$$

Izračunane indekse smo zaokrožili, kot je v navadi, na eno decimalko. □

Osnova za izračun indeksov je lahko kateri koli podatek časovne vrste. Če izberemo za osnovo namesto začetnega podatka Y_0 podatek Y_j, lahko že izračunane ***indekse pretvorimo na novo osnovo***.

$$I_{k/j} = \frac{Y_k}{Y_j} \cdot 100 = \frac{\frac{Y_k}{Y_0} \cdot 100}{\frac{Y_j}{Y_0} \cdot 100} \cdot 100 = \frac{I_{k/0}}{I_{j/0}} \cdot 100$$

Med indeksi z novo in indeksi s staro osnovo velja torej povezava

$$I_{k/j} = \frac{I_{k/0}}{I_{j/0}}.100.$$

Primer

Iz zgornje tabele izračunajmo indeks za leto 2005 glede na osnovo v letu 2003.

$$I_{2005/2003} = \frac{I_{2005/2000}}{I_{2003/2000}}.100 = \frac{112{,}7}{111{,}7} \cdot 100 = 100{,}9$$

Do istega rezultata bi seveda lahko prišli z neposrednim računom iz podatkov o številu prenočitev.

$$I_{2005/2003} = \frac{Y_{2005}}{Y_{2003}}.100 = \frac{7.572}{7.503} \cdot 100 = 100{,}9$$ □

Primer
Dopolnimo zgornjo tabelo z indeksi pri izbrani osnovi v letu 2003.

Tabela 13: Število prenočitev turistov v Sloveniji, indeksi s stalno osnovo

Leto	Število prenočitev turistov v 1.000	Indeksi s stalno osnovo (bazno leto 2000)	Indeksi s stalno osnovo (bazno leto 2003)
2000	6.719	100	89,6
2001	7.130	106,1	95,0
2002	7.321	109,0	97,6
2003	7.503	111,7	100
2004	7.589	112,9	101,1
2005	7.572	112,7	100,9
2006	7.722	114,9	102,9
2007	8.261	122,9	110,1

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2007 in 2008

Pri indeksu za leto 2000 z osnovo v letu 2003 pride do majhnega razhajanja na zadnjem mestu med izračunom iz podatkov o številu prenočitev in izračunom iz indeksov z osnovo v letu 2000. Iz podatkov dobimo zapisani indeks 89,6, iz indeksov z osnovo v letu 2000 pa dobimo indeks 89,5. Na prvi decimalki nastane razlika 1 zato, ker so že prvotni indeksi zaokroženi na eno decimalko. Do podobnega razhajanja pride pri indeksu za leto 2007. □

Indeksi, ki so večji od 100, kažejo, da je vrednost pojava (vrednost statistične spremenljivke) v opazovanem obdobju ali trenutku večja od bazne vrednosti pojava za toliko odstotkov, za kolikor indeks presega vrednost 100. Nasprotno pa indeksi, ki so manjši od 100, kažejo, da je vrednost pojava manjša od bazne vrednosti za toliko odstotkov, za kolikor je indeks manjši od 100.

Verižni indeksi so najpomembnejši izmed indeksov s premično osnovo. Sodijo med t. i. ***kazalce rasti***. Pri teh indeksih gre za primerjavo vrednosti pojava v dveh zaporednih obdobjih. Naj bo $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dana časovna vrsta. ***Verižne indekse*** izračunamo z naslednjo formulo.

$$V_k = I_{k/k-1} = \frac{Y_k}{Y_{k-1}} \cdot 100, \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Verižnega indeksa V_0 za začetno obdobje seveda ne moremo izračunati, saj v časovni vrsti ni podatka za obdobje pred tem obdobjem. Zaporedje verižnih indeksov se torej začne z indeksom V_1.

$$V_1 = \frac{Y_1}{Y_0}\cdot 100\,,\quad V_2 = \frac{Y_2}{Y_1}\cdot 100\,,\quad V_3 = \frac{Y_3}{Y_2}\cdot 100\,,\quad \ldots\ldots,\ V_n = \frac{Y_n}{Y_{n-1}}\cdot 100$$

Primer

Uporabimo podatke o prenočitvah turistov iz zgornjega primera. Izračunajmo verižne indekse.

Tabela 14: Število prenočitev turistov v Sloveniji, verižni indeksi

Leto	Število prenočitev turistov v 1000	Verižni indeksi
2000	6.719	–
2001	7.130	106,1
2002	7.321	102,7
2003	7.503	102,5
2004	7.589	101,1
2005	7.572	99,8
2006	7.722	102,0
2007	8.261	107,0

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2007 in 2008

Zapišimo npr. izračun verižnega indeksa za leto 2004:

$$V_{2004} = \frac{Y_{2004}}{Y_{2003}}\cdot 100 = \frac{7.589}{7.503}\cdot 100 = 101{,}1$$

Ta verižni indeks kaže, da se je število prenočitev turistov v letu 2004 povečalo za 1,1 % glede na prejšnje leto. Verižni indeks za leto 2005 pa kaže, da se je število prenočitev turistov v tem letu zmanjšalo za 0,2 % ($100\ \% - 99{,}8\ \%$) glede na prejšnje leto. □

Verižni indeksi izražajo ***dinamiko opazovanega pojava***: indeksi nad 100 kažejo na naraščanje pojava, indeksi pod 100 na upadanje pojava, verižni indeks 100 pa kaže na stagnacijo.

Poleg verižnega indeksa je v rabi tudi njegov tesni sorodnik. ***Koeficient rasti*** ali ***koeficient dinamike*** je razmerje med dvema sosednjima podatkoma časovne vrste $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$:

$$K_j = \frac{Y_j}{Y_{j-1}}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Zveza med verižnimi indeksi in ustreznimi koeficienti rasti je očitna:

$$V_j = K_j \cdot 100$$

Verižni indeks je stokratnik pripadajočega koeficienta rasti.

Koeficienta rasti za začetno obdobje, tako kot verižnega indeksa za to obdobje, seveda ne moremo izračunati. Zaporedje koeficientov rasti se zato začne s koeficientom K_1.

$$K_1 = \frac{Y_1}{Y_0}, \quad K_2 = \frac{Y_2}{Y_1}, \quad K_3 = \frac{Y_3}{Y_2}, \quad \ldots\ldots, \; K_n = \frac{Y_n}{Y_{n-1}}$$

Primer
Vzemimo še enkrat podatke o številu prenočitev turistov v Sloveniji za štiri zaporedna leta.

Tabela 15: Število prenočitev turistov v Sloveniji, koeficienti rasti in verižni indeksi

Leto	Število prenočitev turistov v 1000	Koeficienti rasti	Verižni indeksi
2003	7.503	–	–
2004	7.589	1,011	101,1
2005	7.572	0,998	99,8
2006	7.722	1,020	102,0

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2007

Zapišimo račun za leto 2005. Iz podatkov za leti 2005 in 2004 izračunamo najprej koeficient rasti.

$$K_{2005} = \frac{Y_{2005}}{Y_{2004}} = \frac{7.572}{7.589} = 0{,}998$$

Iz zveze $V_j = K_j \cdot 100$ dobimo verižni indeks $V_{2005} = 0{,}998 \cdot 100 = 99{,}8$. Koeficiente rasti izpišemo na tri decimalke natančno. Tako ohranimo stopnjo natančnosti, ki smo jo izbrali pri zapisovanje indeksov. □

Koeficienti rasti, ki so večji od 1, kažejo na rast; koeficienti manjši od 1, na upadanje; koeficient 1 pa na stagnacijo opazovanega pojava.

Če pomnožimo npr. prvih *j* koeficientov rasti, lahko izpeljemo več zanimivih rezultatov.

$$K_1 K_2 K_3 \ldots\; K_{j-1} K_j = \frac{Y_1}{Y_0} \cdot \frac{Y_2}{Y_1} \cdot \frac{Y_3}{Y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{Y_{j-1}}{Y_{j-2}} \cdot \frac{Y_j}{Y_{j-1}} = \frac{Y_j}{Y_0} = \frac{I_{j/0}}{100}$$

Iz zgornjih enakosti izpeljemo najprej ***zvezo med baznimi indeksi in koeficienti rasti***.

$$I_{j/0} = K_1 K_2 K_3 \ldots K_{j-1} K_j \cdot 100$$

Upoštevajmo zdaj še povezavo $K_j = \frac{V_j}{100}$, pa dobimo ***zvezo med baznimi indeksi in verižnimi indeksi.***

$$I_{j/0} = \frac{V_1}{100} \cdot \frac{V_2}{100} \cdot \frac{V_3}{100} \ldots \frac{V_{j-1}}{100} \cdot \frac{V_j}{100} \cdot 100$$

Iz zgornje izpeljave izluščimo enakost $K_1K_2K_3\ldots K_{j-1}K_j = \dfrac{Y_j}{Y_0}$, ob tem pa sledi še priročno navodilo, kako ***s koeficienti rasti izračunati podatek*** Y_j ***iz začetnega podatka*** Y_0.

$$Y_j = Y_0K_1K_2K_3 \ldots K_{j-1}K_j$$

Stopnje rasti so še ena vrsta kazalcev rasti. Stopnja rasti pove, za koliko odstotkov je podatek Y_j v časovni vrsti $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ večji oziroma manjši od predhodnega podatka Y_{j-1}. Velja torej:

$$S_j = \frac{Y_j - Y_{j-1}}{Y_{j-1}} \cdot 100.$$

S kratkim računom ugotovimo, da so stopnje rasti tesno povezane z verižnimi indeksi in s koeficienti rasti: $S_j = \left(\dfrac{Y_j}{Y_{j-1}} - 1\right)\cdot 100 = \dfrac{Y_j}{Y_{j-1}}\cdot 100 - 100 = V_j - 100 = K_j \cdot 100 - 100$. Zato je

$$S_j = V_j - 100 = 100\,(K_j - 1).$$

Primer
Dodajmo zadnjemu primeru še stopnje rasti.

Tabela 16: Število prenočitev turistov v Sloveniji, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Število prenočitev turistov v 1.000	Koeficienti rasti	Verižni indeksi	Stopnje rasti
2003	7.503	–	–	–
2004	7.589	1,011	101,1	1,1
2005	7.572	0,998	99,8	-0,2
2006	7.722	1,020	102,0	2,0

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2007

Najhitreje izračunamo stopnje rasti iz verižnih indeksov. Upoštevamo zvezo $S_j = V_j - 100$. Tako dobimo npr. $S_{2004} = 101{,}1 - 100 = 1{,}1$ in $S_{2005} = 99{,}8 - 100 = -0{,}2$. Prvi rezultat pove, da se je število prenočitev v letu 2004 povečalo za 1,1 % glede na leto 2003, negativna stopnja rasti v letu 2005 pa pove, da se je število prenočitev v tem letu zmanjšalo za 0,2 % glede na prejšnje leto. □

V okvirih izbrane natančnosti zapisujemo stopnje rasti na eno decimalko natančno, tako kot verižne indekse. Pozitivne stopnje rasti kažejo rast, negativne stopnje upadanje, ničelna stopnja rasti pa stagnacijo opazovanega pojava.

Oglejmo si še grafični prikaz indeksov. ***Indekse s stalno osnovo prikažemo z linijskim grafikonom***. Abscisna os koordinatnega sistema je časovna os, na ordinatno os pa nanesemo vrednosti indeksov. Vsakemu indeksu priredimo točko v tem sistemu. Njena abscisa je sredina ustreznega časovnega intervala oziroma ustrezen časovni trenutek, njena ordinata pa je enaka vrednosti indeksa. Narisane točke nato povežemo z lomljeno črto. Zaradi nazornosti poudarimo še vzporednico z abscisno osjo na višini indeksa 100. V časovnih intervalih ali časovnih trenutkih, pri katerih je linijski grafikon nad to vzporednico, so vrednosti opazovane statistične spremenljivke večje od bazne vrednosti, v časovnih intervalih ali časovnih trenutkih, pri katerih pa je pod njo, so vrednosti opazovane spremenljivke manjše od bazne vrednosti.

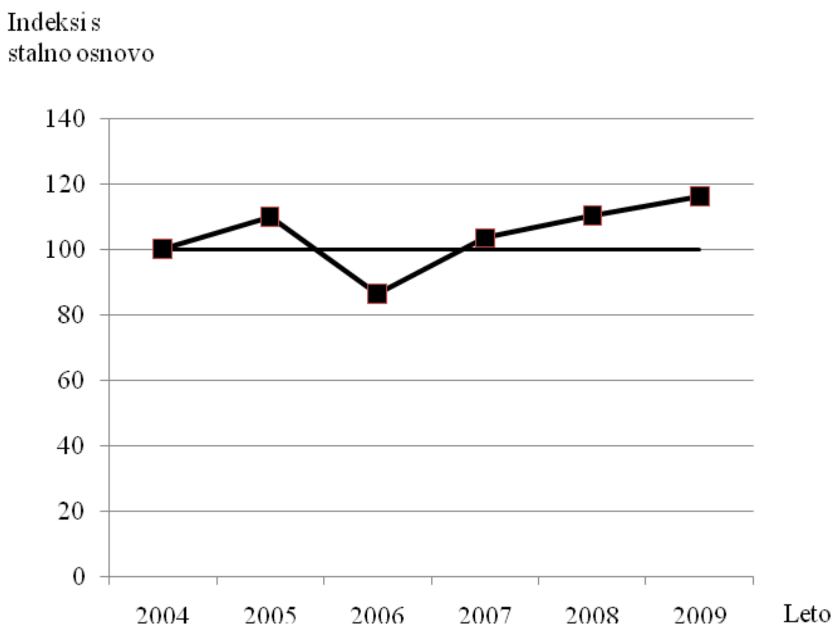
Verižne indekse prikažemo s stolpci v enako zasnovanem koordinatnem sistemu, kot bazne indekse: abscisna os je časovna os, ordinatna os pa vsebuje vrednosti indeksov. Verižni indeks, večji od 100, prikažemo s stolpcem, ki sega od vzporednice z abscisno osjo na višini 100 navzgor do vrednosti indeksa, verižni indeks, manjši od 100, pa s stolpcem, ki sega od te vzporednice navzdol do vrednosti indeksa. Tako zasnovan graf nazorno prikazuje obdobja naraščanja oziroma upadanja opazovane statistične spremenljivke.

Primer
Spodnja tabela prikazuje podatke o letnem prometu v blagovnici M&B v obdobju 2004-2009, ustrezne indekse s stalno osnovo v letu 2004 in verižne indekse.

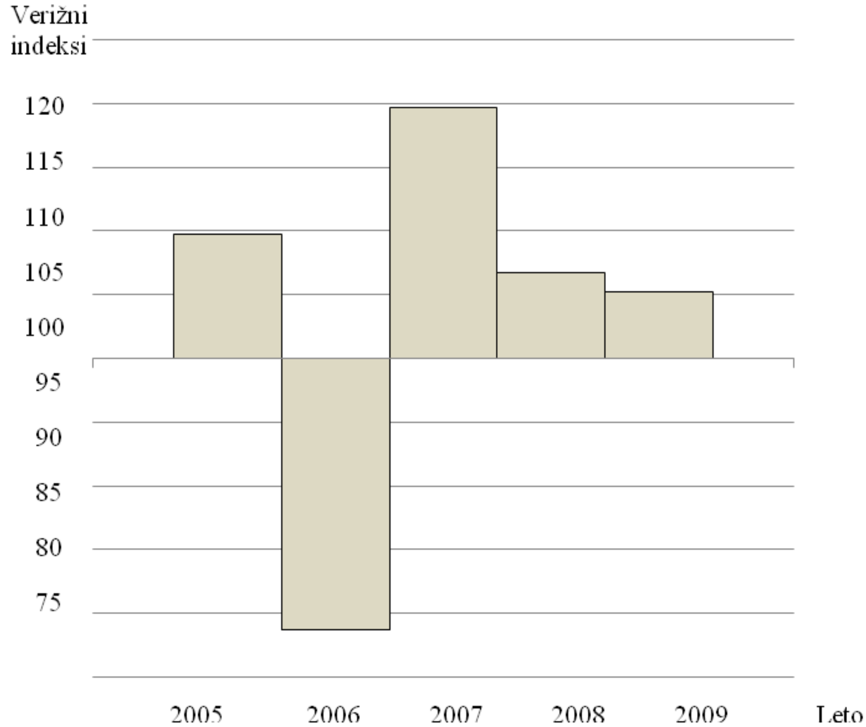
Tabela 17: Letni promet v blagovnici M&B, indeksi s stalno osnovo in verižni indeksi

Leto	Letni promet v 1.000 EUR	Indeksi s stalno osnovo (bazno leto 2004)	Verižni indeksi
2004	1.650	100	-
2005	1.810	109,7	109,7
2006	1.425	86,4	78,7
2007	1.706	103,4	119,7
2008	1.820	110,3	106,7
2009	1.915	116,1	105,2

Prikažimo izračunane indekse grafično.



Slika 7: Grafični prikaz indeksov s stalno osnovo (bazno leto 2004)



Slika 8: Grafični prikaz verižnih indeksov

Sklep

Povzemimo rezultate tega poglavja. Strukturo opazovane populacije glede na izbrano statistično spremenljivko znamo nazorno prikazati s števili in tudi grafično. Vsebinsko povezanost raznovrstnih podatkov znamo ovrednotiti z ustreznim statističnim koeficientom. Znamo tudi ovrednotiti in nazorno prikazati časovno dinamiko opazovanega pojava.

***

NALOGE

10.1. ***Enorazsežna struktura***.
Tabela prikazuje prihode turistov v Slovenijo leta 2007 po vrstah krajev. Dopolnite tabelo.

Tabela 18: Prihodi turistov v Slovenijo leta 2007 po vrstah krajev

Vrsta kraja	Število turistov v 1.000	Struktura v %
Glavno mesto Ljubljana	372,2	
Zdraviliški kraji	632,5	
Obmorski kraji	545,5	
Gorski kraji	663,3	
Drugi turistični kraji	434,1	
Drugi kraji	33,6	
Skupaj	2681,2	

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.2. ***Dvorazsežna struktura***.
Tabela prikazuje strukturo zaposlenih v trgovini po spolu in stopnji strokovne izobrazbe v Sloveniji 31. 12. 2004.

Tabela 19: Zaposleni v trgovini po spolu in stopnji strokovne izobrazbe v Sloveniji 31. 12. 2004

Spol	Stopnja strokovne izobrazbe				
	Visoka	Višja	Srednja	Poklicna in nižja	Skupaj
Moški	3.365	2.321	13.510	22.935	42.131
Ženske	3.776	2.154	17.437	23.875	47.242
Skupaj	7.141	4.475	30.947	46.810	89.373

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2005

Prikažite strukturo zaposlenih v trgovini:
a) po spolu (stolpčna struktura),
b) po stopnji strokovne izobrazbe (vrstična struktura),
c) po spolu in po stopnji strokovne izobrazbe (kotna struktura).

10.3. Tabela prikazuje število prodajaln, površino prodajnega prostora in število zaposlenih v slovenskih trgovinah konec leta 1998.

Tabela 20: Število prodajaln, površina prodajnega prostora in število zaposlenih v slovenskih trgovinah konec leta 1998

Vrsta trgovine	Število prodajaln	Površina prodajnega prostora v m^2	Število zaposlenih
Trgovina na drobno z živili, pijačami in tobakom	3.924	407.082	16.354
Trgovina na drobno z neživili	6.141	627.733	18.537
Trgovina na drobno z motornimi vozili	499	55.877	1.326
Trgovina na drobno z motornimi gorivi	329	15.923	1.876
Skupaj	10.893	1.106.615	38.093

Vir: Statistični letopis Slovenije, 1999

Izračunajte naslednje statistične koeficiente za posamezne vrste trgovin in za panogo v celoti:
a) površino prodajnega prostora v m^2 na prodajalno,
b) površino prodajnega prostora v m^2 na zaposlenega,
c) število zaposlenih na prodajalno.

10.4. Tabela prikazuje podatke o prometu, stanju zalog in številu prodajalcev v trgovini M4U (prirejeni podatki).

Tabela 21: Promet, stanje zalog in število prodajalcev v trgovini M4U

Mesec	Promet v tisoč EUR	Stanje zalog na začetku meseca v 1.000 EUR	Povprečno število prodajalcev
Januar	460	370	32
Februar	420	350	30
Marec	440	320	30
April	450	330	31
Maj	–	320	–

Izračunajte:

a) povprečno mesečno vrednost prodaje na 10 prodajalcev,
b) povprečni mesečni in povprečni letni koeficient obračanja zalog,
c) povprečno dolžino enega obrata zalog (mesec šteje povprečno 24 delovnih dni).

10.5. Vrednost prodaje v trgovini B4B v letu 2008 je bila 182.724 EUR, stanje zalog po kvartalih v letu 2008 je prikazano v spodnji tabeli. Izračunajte povprečni koeficient obračanja zalog v tem letu in povprečni čas enega obrata zalog (v letu 2008 so delali 290 dni).

Tabela 22: Stanje zalog v trgovini B4B

Kvartal	Vrednost zalog na koncu kvartala v EUR
4. kvartal 2007	17.124
1. kvartal 2008	18.248
2. kvartal 2008	19.610
3. kvartal 2008	16.654
4. kvartal 2008	17.388

10.6. Tabela prikazuje podatke o zaposlenih, zalogah in prometu v trgovskem podjetju HELIKS v letu 2008.

Tabela 23: Število zaposlenih, stanje zalog in promet v podjetju HELIKS

Mesec	Število zaposlenih na začetku meseca	Zaloge na začetku meseca v 1.000 EUR	Promet v 1.000 EUR
Januar	12	200	220
Februar	11	165	290
Marec	9	205	185
April	10	235	275
Maj	12	175	290
Junij	9	215	315
Julij	8	180	325
Avgust	10	190	285
September	11	215	290
Oktober	12	165	310
November	10	145	275
December	11	155	340
Januar	10	180	–

Izračunajte:

a) povprečni mesečni promet na 10 zaposlenih v letu 2008,
b) povprečni mesečni koeficient obračanja zalog v letu 2008,
c) povprečno dolžino trajanja enega obrata zalog (mesec šteje povprečno 25 delovnih dni).

10.7. Tabela prikazuje število prenočitev turistov v Sloveniji v obdobju 2003–2007. Izračunajte indekse s stalno osnovo v letu 2003, verižne indekse, koeficiente rasti in stopnje rasti. Dopolnite tabelo.

Tabela 24: Število prenočitev turistov v Sloveniji v obdobju 2003–2007

Leto	Število prenočitev gostov v 1.000	Indeksi s stalno osnovo (bazično leto 2003)	Verižni indeksi	Koeficienti rasti	Stopnje rasti
2003	7.503	100	–	–	–
2004	7.589				
2005	7.572				
2006	7.722				
2007	8.261				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.8. Tabela prikazuje strukturo prebivalstva Slovenije po aktivnosti v 2. četrtletju vsakega leta. Izračunajte koeficiente rasti in stopnje rasti za posamezne segmente prebivalstva.

Tabela 25: Struktura prebivalstva Slovenije po aktivnosti v 2. četrtletju navedenih let

Leto	Aktivno prebivalstvo v 1.000	Delovno aktivno prebivalstvo v 1.000	Brezposelne osebe v 1.000	Neaktivno prebivalstvo v 1.000
2003	959	896	63	739
2004	1.007	946	61	699
2005	1.005	947	58	706
2006	1.030	969	61	690
2007	1.042	994	48	688

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.9. Tabela prikazuje povprečne mesečne neto plače na zaposleno osebo pri pravnih osebah. Izračunajte bazne indekse z osnovo v letu 2004, verižne indekse, koeficiente rasti in stopnje rasti.

Tabela 26: Povprečne mesečne neto plače na zaposleno osebo pri pravnih osebah

Leto	Neto v EUR				
2000	503,63				
2001	562,74				
2002	617,37				
2003	663,80				
2004	701,90				
2005	735,73				
2006	773,42				
2007	834,50				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.10. Tabela prikazuje podatke o številu diplomantov višjih strokovnih šol v obdobju 2003–2007. Izračunajte bazne indekse z osnovo v letu 2004, verižne indekse, koeficiente rasti in stopnjo rasti za skupno število diplomantov in za diplomante ženskega spola.

Tabela 27: Številu diplomantov višjih strokovnih šol v obdobju 2003–2007

Leto	Skupaj	Ženske
2003	1.250	589
2004	1.829	922
2005	2.330	1.206
2006	2.834	1.511
2007	2.874	1.522

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.11. Tabela prikazuje povprečno letno količino nabavljenih živil na člana gospodinjstva za nekatere vrste živil. Izračunajte bazne indekse z osnovo v letu 2004, verižne indekse, koeficiente rasti in stopnje rasti za posamezne vrste živil.

Tabela 28: Povprečna letna količina nabavljenih živil na člana gospodinjstva

Leto	Kruh in pecivo v kg	Govedina v kg	Sladkor in med v kg	Vino v litrih
2002	56,8	9,0	14,2	7,5
2003	52,8	8,9	13,8	6,9
2004	50,0	9,2	12,8	7,0
2005	46,1	8,9	11,3	6,6
2006	42,3	8,9	10,6	6,1

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.12. Tabela prikazuje povprečne drobnoprodajne cene nekaterih vrst živil. Izračunajte bazne indekse z osnovo v letu 2004, verižne indekse, koeficiente rasti in stopnje rasti za posamezne vrste živil.

Tabela 29: Povprečne drobnoprodajne cene živil

Leto	Beli kruh v EUR/kg	Goveje meso brez kosti v EUR/kg	Sladkor v EUR/kg	Kakovostno belo vino v EUR /l
2003	1,65	6,80	0,78	2,26
2004	1,75	6,45	0,86	2,01
2005	1,84	6,25	0,87	1,90
2006	1,77	6,93	0,82	1,92
2007	1,84	7,10	0,82	2,06

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

11 FREKVENČNE PORAZDELITVE

Zbrali smo podatke o vrednostih opazovane statistične spremenljivke na celotni populaciji ali na izbranem vzorcu. Pred nami je nepregledna množica podatkov. Kako vpeljati red v to množico, kako nazorno prikazati zbrane informacije o spremenljivki? V tem poglavju bomo podali nekaj odgovorov na ta vprašanja.

Frekvenčna porazdelitev je razrez populacije na podmnožice. Podmnožicam pravimo ***razredi***. Kriterij za uvrstitev posamezne enote v nek razred je vrednost, ki jo statistična spremenljivka zavzame na tej enoti. Razredi morajo biti enolično opredeljeni in morajo pokriti celotno populacijo, tako da sodi vsaka enota v natanko en razred.

Primer
Proučujemo telesno višino večje skupine oseb. Najnižja oseba meri v višino 155 cm, najvišja pa 198 cm. Odločimo se npr. za pet razredov enake širine.

1. razred: od 150 cm do pod 160 cm,
2. razred: od 160 cm do pod 170 cm,
3. razred: od 170 cm do pod 180 cm,
4. razred: od 180 cm do pod 190 cm,
5. razred: od 190 cm do pod 200 cm.

Oseba, ki meri v višino npr. 183 cm, sodi v četrti razred, tista, ki meri natanko 160 cm, pa v drugega. Pri istih mejah bi seveda lahko opredelili razrede tudi drugače: nad 150 cm do (vključno) 160 cm, nad 160 cm do 170 cm itn. Oseba s 160 cm višine bi tedaj sodila v prvi razred. □

Poglejmo si podrobneje frekvenčno porazdelitev pri številskih spremenljivkah. Naj bo Y številska spremenljivka, N število enot v populaciji (ali vzorcu) in r število razredov. Definirajmo:

spodnja meja razreda	$y_{j,\min}$,	$j = 1,2,\ldots,r$
zgornja meja razreda	$y_{j,\max}$,	$j = 1,2,\ldots,r$
širina razreda	$d_j = y_{j,\max} - y_{j,\min}$,	$j = 1,2,\ldots,r$
sredina razreda	$y_j = \dfrac{y_{j,\min} + y_{j,\max}}{2}$,	$j = 1,2,\ldots,r$

Sredina razreda je reprezentativna vrednost posameznega razreda. Predstavlja vse enote, ki sodijo v ta razred. Pri zveznih spremenljivkah se sosednji razredi stikajo, zgornja meja razreda je obenem tudi spodnja meja naslednjega razreda. Pri diskretnih spremenljivkah pa vsako vrednost, ki jo zavzame spremenljivka, vložimo v svoj interval (razred) tako, da je ta vrednost na sredini razreda in ob tem poskrbimo za stik med sosednjimi razredi.

Primer
Naj bo opazovana spremenljivka Y število članov gospodinjstva. Spremenljivka zavzame samo celoštevilske vrednosti $1,2,3,\ldots$ Razred, ki pripada vrednosti $y = 1$, seže od 0,5 do 1,5. Naslednji razred, ki pripada vrednosti $y = 2$, seže od 1,5 do 2,5 itn. □

Ko razrežemo opazovano populacijo N enot na r razredov, preštejemo, koliko enot sodi v posamezen razred. Ta števila so frekvence razredov.

Frekvenca f_j je število enot, ki sodijo v j-ti razred. Velja: $f_1 + f_2 + \cdots + f_r = \sum_{j=1}^{r} f_j = N.$

Relativna frekvenca $f_j^{\,0}$ je relativni delež, ki ga enote j-tega razreda predstavljajo v celotni populaciji.

$$f_j^{\,0} = \frac{f_j}{N}$$

Velja $f_1^{\,0} + f_2^{\,0} + \cdots + f_r^{\,0} = \sum_{j=1}^{r} f_j^{\,0} = 1$.

Kumulativa frekvenc F_j je število tistih enot, pri katerih je vrednost spremenljivke manjša ali enaka zgornji meji j-tega razreda, če je razrez populacije tak, da pripada zgornja meja vsakega razreda temu razredu. Če pa sodi zgornja meja vsakega razreda v naslednji razred, je kumulativa frekvenc F_j število tistih enot, pri katerih je vrednost spremenljivke manjša od zgornje meje j-tega razreda. Kumulativa prvega razreda je zato kar enaka njegovi frekvenci, kumulativa drugega razreda prišteje k prvi kumulativi frekvenco drugega razreda itn. Zato velja

$$F_1 = f_1, \qquad F_j = F_{j-1} + f_j, \quad \text{pri čemer je } j = 2,3,\ldots,r.$$

Kumulativa relativnih frekvenc $F_j^{\,0}$ je relativni delež tistih enot, na katerih je vrednost spremenljivke manjša oziroma manjša ali enaka zgornji meji j-tega razreda.

$$F_1^{\,0} = f_1^{\,0}, \qquad F_j^{\,0} = F_{j-1}^{\,0} + f_j^{\,0}, \quad \text{pri čemer je } j = 2,3,\ldots,r.$$

Bralec bo brez težav ugotovil, da velja zveza $F_j^{\,0} = \frac{F_j}{N}$, $j = 1,2,\ldots,r$.

Primer
Spodnja tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev 50 trgovin glede na površino prodajnega prostora. Levi stolpec prikazuje meje razredov, desni stolpec pa njihove frekvence, torej števila trgovin, ki sodijo v posamezni razred.

Tabela 30: Frekvenčna porazdelitev trgovin glede na površino prodajnega prostora

Površina prodajnega prostora v m^2	f_j
nad 40 do 80	5
nad 80 do 120	10
nad 120 do 160	21
nad 160 do 200	9
nad 200 do 240	5
Σ	50

Izračunajmo kumulative absolutnih frekvenc.

$$F_1 = f_1 = 5$$
$$F_2 = F_1 + f_2 = 5 + 10 = 15$$
$$F_3 = F_2 + f_3 = 15 + 21 = 36$$
$$F_4 = F_3 + f_4 = 36 + 9 = 45$$
$$F_5 = F_4 + f_5 = 45 + 5 = 50$$

Izračunajmo še relativne frekvence in kumulative relativnih frekvenc.

$$f_1^0 = \frac{f_1}{N} = \frac{5}{50} = 0{,}1 \qquad F_1^0 = \frac{F_1}{N} = \frac{5}{50} = 0{,}1$$
$$f_2^0 = \frac{f_2}{N} = \frac{10}{50} = 0{,}2 \qquad F_2^0 = \frac{F_2}{N} = \frac{15}{50} = 0{,}3$$
$$f_3^0 = \frac{f_3}{N} = \frac{21}{50} = 0{,}42 \qquad F_3^0 = \frac{F_3}{N} = \frac{36}{50} = 0{,}72$$
$$f_4^0 = \frac{f_4}{N} = \frac{9}{50} = 0{,}18 \qquad F_4^0 = \frac{F_4}{N} = \frac{45}{50} = 0{,}9$$
$$f_5^0 = \frac{f_5}{N} = \frac{5}{50} = 0{,}1 \qquad F_5^0 = \frac{F_5}{N} = \frac{50}{50} = 1$$

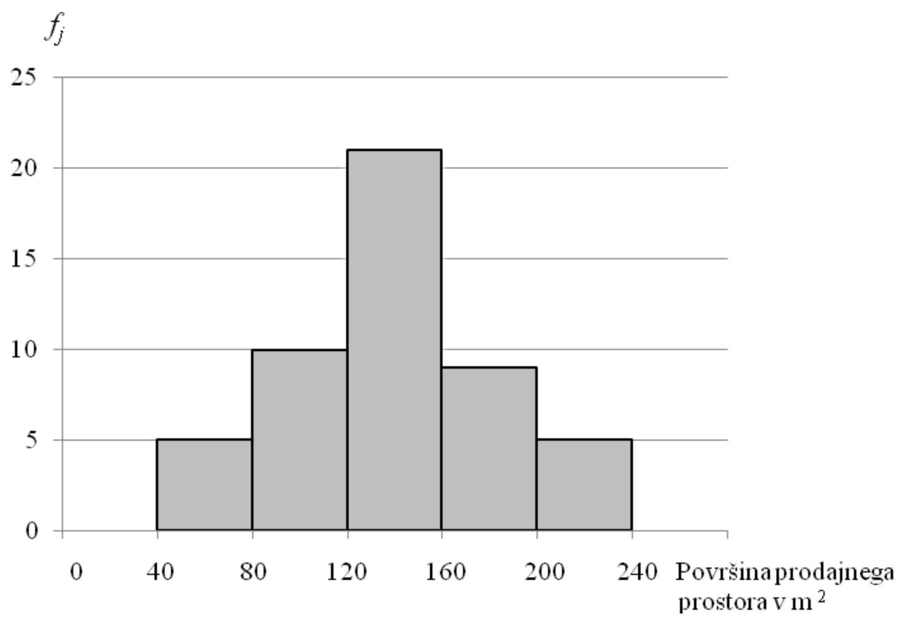
Izračunane rezultate prikažimo s tabelo. Dodajmo še stolpec s sredinami razredov y_j.

Tabela 31: Frekvenčna porazdelitev trgovin glede na površino prodajnega prostora

Površina prodajnega prostora v m^2	y_j	f_j	F_j	f_j^0	F_j^0
nad 40 do 80	60	5	5	0,1	0,1
nad 80 do 120	100	10	15	0,2	0,3
nad 120 do 160	140	21	36	0,42	0,72
nad 160 do 200	180	9	45	0,18	0,9
nad 200 do 240	220	5	50	0,1	1
Σ	–	50	–	1	–

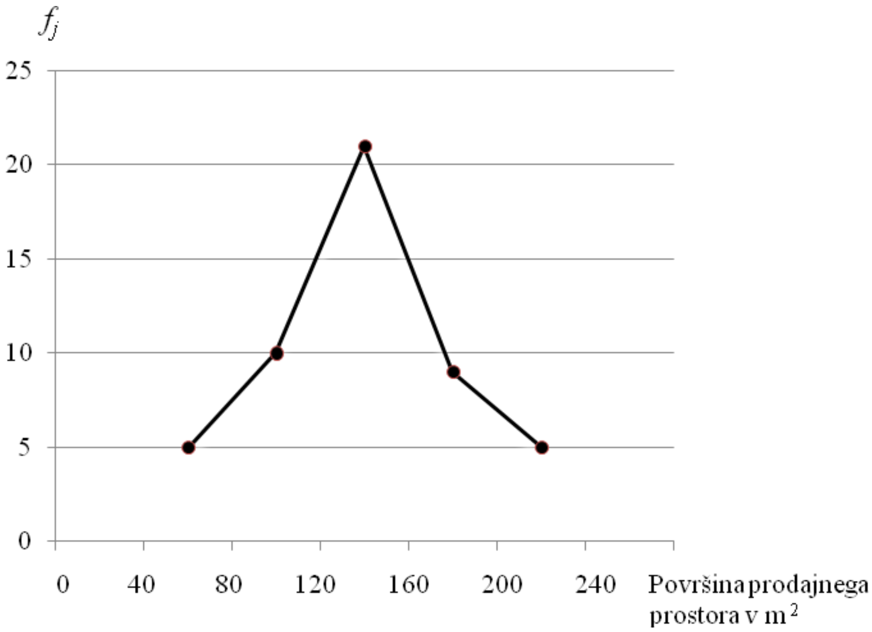
Frekvenčne porazdelitve lahko predstavimo tudi grafično: s histogramom ali pa s frekvenčnim poligonom.

Histogram je prikaz s stolpci. Narišemo ga v koordinatni ravnini. Na abscisno os nanesemo vrednosti opazovane statistične spremenljivke, na ordinatno os pa absolutne frekvence razredov. Širina stolpca, ki prikazuje dani razred, ustreza širini tega razreda, višina stolpca pa je premo sorazmerna frekvenci tega razreda. Narišimo histogram zgornje porazdelitve trgovin po površini prodajnega prostora.



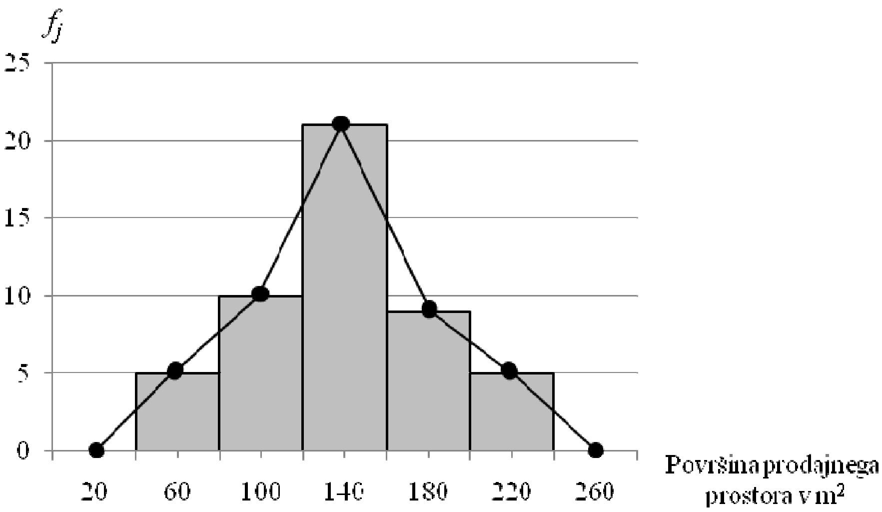
Slika 9: Histogram frekvenčne porazdelitve trgovin glede na površino prodajnega prostora

Frekvenčni poligon je lomljena črta. Narišemo jo v koordinatni ravnini, na abscisno os nanesemo vrednosti opazovane statistične spremenljivke, na ordinatno os pa absolutne frekvence razredov. Razred predstavimo s točko, njena abscisa je enaka sredini razreda, ordinata pa njegovi frekvenci. Npr.: prvi razred zgornje porazdelitve predstavimo s točko $(60, 5)$. Dobljene točke nato povežemo z lomljeno črto. Prikažimo zgornjo porazdelitev trgovin.



Slika 10: Frekvenčni poligon porazdelitve trgovin glede na površino prodajnega prostora

Narišimo še oba grafa v istem koordinatnem sistemu. Frekvenčnemu poligonu dodajmo še levo od prvega razreda in desno od zadnjega razreda dva prazna razreda s frekvencama 0 in ju prikažimo z ustreznima točkama na abscisni osi.

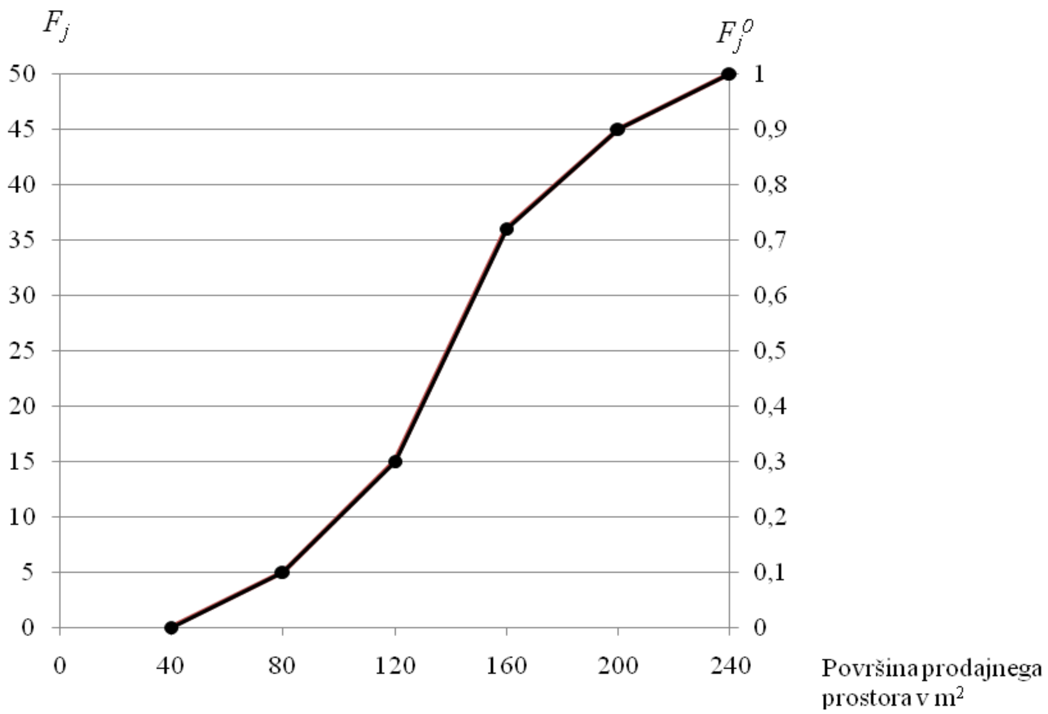


Slika 11: Primerjava histograma in frekvenčnega poligona porazdelitve trgovin glede na površino prodajnega prostora

Bralec bo zlahka preveril, da je ploščina lika med frekvenčnim poligonom in abscisno osjo enaka vsoti ploščin vseh stolpcev histograma.

S histogramom običajno prikazujemo porazdelitev zveznih spremenljivk, frekvenčni poligon pa je primernejši za diskretne spremenljivke.

Graf kumulative absolutnih frekvenc oziroma ***graf kumulative relativnih frekvenc*** prikažemo z lomljeno črto. Kumulativi danega razreda priredimo točko, katere abscisa je enaka zgornji meji tega razreda, ordinata pa vrednosti kumulative. Ordinatna os levo od grafa prikazuje vrednosti kumulative absolutnih frekvenc, pomožna ordinatna os desno od grafa pa kumulativo relativnih frekvenc. Graf kumulative številnih porazdelitev ima značilno obliko stilizirane črke S. Uporabimo še enkrat porazdelitev trgovin iz zgornjega primera in narišimo graf kumulative.



Slika 12: Graf kumulative absolutnih in relativnih frekvenc frekvenčne porazdelitve trgovin glede na površino prodajnega prostora

Sklep
V na videz neurejeno množico podatkov o statistični spremenljivki smo uvedli red. Opazovano populacijo smo razrezali na razrede, razredom pripisali frekvence, relativne frekvence, kumulativo frekvenc in kumulativo relativnih frekvenc. Prikazali smo frekvenčno porazdelitev statistične spremenljivke ter različne grafične prikaze frekvenčne porazdelitve in kumulative absolutnih oziroma relativnih frekvenc.

***

NALOGE

11.1. Tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev trgovin v regiji po vrednosti prometa (prirejeni podatki).

Tabela 32: Frekvenčna porazdelitev trgovin v regiji po vrednosti prometa

Vrednost prometa v 1.000 EUR	Število trgovin f_j			
nad 150–250	8			
nad 250–350	11			
nad 350–450	27			
nad 450–550	32			
nad 550–650	18			
nad 650–750	9			
Skupaj	105			

a) Dopolnite tabelo s relativnimi frekvencami, kumulativo frekvenc in kumulativo relativnih frekvenc.
b) Grafično prikažite frekvenčno porazdelitev s histogramom.
c) S poligonom prikažite kumulativo frekvenc.
d) Ocenite iz tabele ali iz grafa kumulative frekvenc, koliko trgovin je imelo:
- največ 350.000 EUR prometa,
- več kot 650.000 EUR prometa,
- med 300.000 in 500.000 EUR prometa,
- nad 600.000 EUR prometa,
- manj kot 300.000 EUR prometa.

e) Koliko odstotkov trgovin je imelo:
- več kot 450.000 EUR prometa,
- manj kot 550.000 EUR prometa?

11.2. Tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev prodajaln po površini prodajnega prostora (prirejeni podatki).

Tabela 33: Frekvenčna porazdelitev prodajaln po površini prodajnega prostora

Površina prodajnega prostora v m^2	y_j	f_j	f_j^0	F_j	F_j^0	
od 50 do pod 70		4				
od 70 do pod 90		6				
od 90 do pod 110		8				
od 110 do pod 130		10				
od 130 do pod 150		17				
od 150 do pod 170		11				
od 170 do pod 190		7				
od 190 do pod 210		2				

Skupaj	–	$N = 65$		–	–	

a) Dopolnite tabelo z relativnimi frekvencami, kumulativo absolutnih frekvenc in kumulativo relativnih frekvenc.
b) Narišite graf kumulative frekvenc. Iz grafa ocenite, koliko m^2 prodajnega prostora ima 20 % prodajaln z največjo površino.
c) Iz grafa kumulative frekvenc ocenite, kolikše delež prodajaln ima več kot $120\ \mathrm{m}^2$ prodajnega prostora.

11.3. Tabela prikazuje ocene 180 študentov pri pisnem izpitu (prirejeni podatki).

Tabela 34: Dosežene ocene pri pisnem izpitu

Ocena y_j	$y_{j,\min}$	$y_{j,\max}$	Št. študentov f_j				
5			2				
6			24				
7			60				
8			64				
9			24				
10			6				
Skupaj			180				

a) Dopolnite tabelo z relativnimi frekvencami, kumulativo absolutnih frekvenc in kumulativo relativnih frekvenc.
b) Prikažite frekvenčno porazdelitev s histogramom.

11.4. Tabela prikazuje grupirane podatke o neto mesečnih plačah zaposlenih v podjetju U4U (prirejeni podatki).

Tabela 35: Neto mesečne plače zaposlenih v podjetju U4U

Neto plača v EUR	y_j	f_j	f_j^0	F_j	F_j^0	
nad 400 – 600		45				
nad 600 – 800		355				
nad 800 – 1.000		290				
nad 1.000 – 1.200		90				
nad 1.200 – 1.400		12				
nad 1.400 – 1.600		4				
nad 1.600 – 1.800		3				
nad 1.800 – 2.000		1				
Skupaj	–	800		–	–	

a) Dopolnite tabelo z relativnimi frekvencami, kumulativo absolutnih frekvenc in kumulativo relativnih frekvenc.
b) Narišite graf kumulative frekvenc. Iz tabele ali iz grafa ocenite:
   - kolikšno neto plačo ima 10 % najbolje plačanih delavcev,
   - kolikšno neto plačo ima 20 % najslabše plačanih delavcev,
   - kolikšen odstotek delavcev zasluži več kot 1.000 EUR neto na mesec,

- kolikšen odstotek delavcev zasluži manj kot 700 EUR neto na mesec.

12 KVANTILI

V tem in v naslednjih dveh poglavjih bomo poglobljeno analizirali notranjo strukturo opazovane populacije glede na vrednosti izbrane statistične spremenljivke. Katera vrednost spremenljivke razpolovi populacijo, tako da doseže spremenljivka na eni polovici populacije večje vrednosti, na drugi polovici pa manjše ali enake vrednosti? Kakšne vrednosti ima spremenljivka na zgornji desetini populacije ali pa na spodnji desetini? Odgovore na ta in na podobna vprašanja bo bralec našel v tem poglavju.

12.1 KVANTILI IN KVANTILNI RANGI V RANŽIRNI VRSTI

Uvodni primer
Denimo, da raziskujemo turistične prenočitvene kapacitete v neki občini. Ta premore 16 prenočišč. Ko zberemo podatke o številu ležišč, je pred nami neurejena množica podatkov. Števila ležišč v prenočiščih so npr.:

33, 45, 19, 22, 58, 40, 39, 16, 24, 28, 90, 60, 18, 50, 30, 82.

Zaporedje zbranih podatkov uredimo v t. i. ***ranžirno vrsto***, od najmanjšega podatka do največjega, vsakemu podatku v tej vrsti pa priredimo ***rang R***: najmanjši vrednosti rang $R=1$, naslednji vrednosti rang $R=2$ in tako naprej do največje vrednosti, ki ji pripada rang $R=16$. Ranžirna vrsta za statistično spremenljivko *y*, ki pomeni število ležišč v danem prenočišču, je torej:

y	16	18	19	22	24	28	30	33	39	40	45	50	58	60	82	90
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

□

Povejmo splošno: populacija naj šteje *N* enot, vrednosti statistične spremenljivke *Y* na teh enotah pa uredimo po velikosti.

$$y_1 \le y_2 \le y_3 \le \cdots \le y_N$$

Vsaki vrednosti priredimo ***rang R***, tj. število, ki pove, katero mesto v tako urejenem nizu zaseda ta podatek. Tako dobimo ***ranžirno vrsto***.

y	y_1	y_2	y_3	$\cdots\cdots$	y_N
R	1	2	3	$\cdots\cdots$	N

Tako definiran rang je diskretna spremenljivka, saj so vrednosti, ki jih zavzame, naravna števila med 1 in *N*.

Rang lahko interpretiramo tudi drugače. Danemu rangu R pripada neka vrednost y_R statistične spremenljivke Y. Rang R je tedaj enak številu tistih enot populacije, pri katerih je vrednost spremenljivke manjša ali enaka vrednosti y_R. V uvodnem primeru npr. pripada rangu $R = 5$ vrednost $y_5 = 24$. To pomeni, da je v občini 5 prenočišč, ki premorejo kvečjemu po 24 ležišč.

Rangu R priredimo ***kvantilni rang P***. Definiran je z obrazcem

$$P = \frac{R - 0{,}5}{N}.$$

S kvantilnim rangom ocenimo delež tistih enot populacije, pri katerih je vrednost spremenljivke Y manjša ali enaka vrednosti y_R (y_R je tista vrednost spremenljivke Y, ki pripada rangu R).

Primer
Uporabimo spet uvodni primer – prenočitvene kapacitete: iz ranžirne vrste preberemo, da pripada rangu $R = 5$ vrednost $y_5 = 24$. Izračunajmo pripadajoči kvantilni rang:

$$P = \frac{5 - 0{,}5}{16} = 0{,}28125 = 28{,}125\ \%.$$

Z njim torej ocenjujemo, da je v opazovani občini 28,125 % prenočišč, ki premorejo kvečjemu po 24 ležišč. Natančnega deleža seveda ni težko izračunati: takih prenočišč je 5, njihov delež prikaže ta izračun.

$$\frac{5}{16} = 0{,}3125 = 31{,}25\ \%$$ □

Ker je rang R diskretna spremenljivka in ker je kvantilni rang P izpeljan iz ranga R, bi bil tudi kvantilni rang diskretna spremenljivka. Ta okvir pa je za nadaljnjo obravnavo preozek, zato definicijo kvantilnega ranga razširimo: ***kvantilni rang P je poljubno realno število med 0 in 1, torej:*** $0 \leq P \leq 1$**.**

Iz zgornjega obrazca za kvantilni rang lahko izrazimo rang R. Danemu kvantilnemu rangu P torej pripada naslednji rang.

$$R = P \cdot N + 0{,}5$$

Kvantilnemu rangu $P = 0$ pripada rang $R = 0{,}5$, kvantilnemu rangu $P = 1$ pa rang $R = N + 0{,}5$. Ker je P zvezna spremenljivka z vrednostmi med 0 in 1, postane posredno tudi rang R zvezna spremenljivka, ki lahko zavzame poljubno realno število med 0,5 in $N + 0{,}5$. Številu 0,5, ki nastopa v zgornjih obrazcih pravimo ***dodatek za zveznost***.

Kvantil je tista vrednost statistične spremenljivke y, ki ustreza kvantilnemu rangu P.

Primer

Uporabimo še enkrat uvodni primer in izračunajmo kvantil, ki pripada kvantilnemu rangu $P = 0{,}75$. Ustrezni rang $R = 0{,}75 \cdot 16 + 0{,}5 = 12{,}5$ leži natanko na sredini med dvanajsto in trinajsto enoto v ranžirni vrsti, zato ocenjujemo, da je iskani kvantil na sredini med ustreznima vrednostma spremenljivke, torej med 50 in 58. Ta kvantil je zato enak $y_R = 54$. Interpretirajmo rezultat: ocenjujemo, da je v občini 75 % prenočišč, katerih kapacitete so manjše ali enake 54 ležiščem. Bralec bo zlahka neposredno preveril, da je takih prenočišč 12, torej natanko 75 %. □

Med kvantili so najpogosteje v rabi kvartili, decili in centili.

Kvartili

- ***Prvi kvartil*** Q_1 pripada kvantilnemu rangu $P(Q_1) = 0{,}25$. Pri 25 % enot populacije je vrednost spremenljivke y manjša ali enaka Q_1.
- ***Drugi kvartil*** Q_2 pripada kvantilnemu rangu $P(Q_2) = 0{,}50$. Pri 50 % enot populacije je vrednost spremenljivke y manjša ali enaka Q_2. Temu kvartilu bomo kasneje dali ime mediana.
- ***Tretji kvartil*** Q_3 pripada kvantilnemu rangu $P(Q_1) = 0{,}75$. Pri 75 % enot populacije je vrednost spremenljivke y manjša ali enaka Q_3.

Decili

- ***Prvi decil*** D_1 pripada kvantilnemu rangu $P(D_1) = 0{,}10$. Pri desetini enot populacije je vrednost spremenljivke y manjša ali enaka D_1.
- ***Drugi decil*** D_2 pripada kvantilnemu rangu $P(D_2) = 0{,}20$.
- **…….**
- ***Peti decil*** D_5 pripada kvantilnemu rangu $P(D_5) = 0{,}50$. Velja $D_5 = Q_2$.
- **…….**
- ***Deveti decil*** D_9 pripada kvantilnemu rangu $P(D_9) = 0{,}90$.

Centili

- ***Prvi centil*** C_{01} pripada kvantilnemu rangu $P(C_{01}) = 0{,}01$. Pri stotini enot populacije je vrednost spremenljivke y manjša ali enaka C_{01}.
- ***Drugi centil*** C_{02} pripada kvantilnemu rangu $P(C_{02}) = 0{,}02$.
- **…….**
- ***Triintrideseti centil*** C_{33} pripada kvantilnemu rangu $P(C_{33}) = 0{,}33$.
- **…….**
- ***Petdeseti centil*** C_{50} pripada kvantilnemu rangu $P(C_{50}) = 0{,}50$. Velja $C_{50} = D_5 = Q_2$.
- **…….**
- ***Devetindevetdeseti centil*** C_{99} pripada kvantilnemu rangu $P(C_{99}) = 0{,}99$.

12.2 RAČUNANJE KVANTILOV IN KVANTILNIH RANGOV IZ RANŽIRNE VRSTE

Pred nami so podatki o opazovani diskretni statistični spremenljivki, urejeni v ranžirno vrsto.

y	y_1	y_2	y_3	$\cdots\cdots$	y_N
R	1	2	3	$\cdots\cdots$	N

.
Zastavimo si lahko dve nalogi:

1) danemu kvantilu y poiščemo pripadajoči kvantilni rang P in
2) danemu kvantilnemu rangu P poiščemo pripadajoči kvantil y.

Rešimo prvo nalogo. Dan je kvantil y. Izračunajmo najprej njegov pripadajoči rang R. V ranžirni vrsti poiščemo sosednji vrednosti spremenljivke, med kateri umestimo kvantil y. Spodnjo vrednost preimenujemo v y_0, njen rang v R_0, zgornjo vrednost v y_1, njen rang pa v R_1. Velja torej ocena

$$y_0 < y \leq y_1,$$

za iskani rang pa velja

$$R_0 < R \leq R_1.$$

Vrednost R izračunamo tako, da je razmerje med razlikama rangov $R - R_0$ in $R_1 - R_0$ enako razmerju med razlikama $y - y_0$ in $y_1 - y_0$ (razlika sosednjih rangov $R_1 - R_0$ je seveda enaka 1, ker pa želimo ohraniti simetrijo v spodnjih enačbah, bomo uporabili daljši zapis).

$$\frac{R - R_0}{R_1 - R_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Od tod izpeljemo obrazec za iskani rang.

$$R = R_0 + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}(R_1 - R_0)$$

Uporabimo še zvezo med kvantilnim rangom P in rangom R pa dobimo iskani kvantilni rang.

$$P = \frac{R - 0{,}5}{N}.$$

Primer

Uporabimo še enkrat uvodni primer: število ležišč v 16 prenočiščih. Ranžirna vrsta je

y	16	18	19	22	24	28	30	33	39	40	45	50	58	60	82	90
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Poiščimo kvantilni rang, ki pripada kvantilu $y = 27$. Iz ranžirne vrste razberemo, da je ta kvantil med petim in šestim podatkom. Zato velja $y_0 = 24 < y \le y_1 = 28$ in $R_0 = 5 < R \le R_1 = 6$. Izračunajmo rang *R*.

$$R = R_0 + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}(R_1 - R_0) = 5 + \frac{27-24}{28-24}(6-5) = 5{,}75$$

Pripadajoči kvantilni rang *P* je

$$P = \frac{R - 0{,}5}{N} = \frac{5{,}75 - 0{,}5}{16} \approx 0{,}3281 = 32{,}81\,\%.$$

Interpretacija rezultata: ocenjujemo, da je med 16 prenočišči 32,81 % takih, ki premorejo kvečjemu 27 ležišč. Iz ranžirne vrste bo bralec bo brez težav razbral, da je takih prenočišč natanko 5, torej 31,25 % populacije. □

Rešimo še drugo nalogo: danemu kvantilnemu rangu *P* poiščemo pripadajoči kvantil *y*. Izračunajmo najprej pripadajoči rang.

$$R = P \cdot N + 0{,}5$$

Iz že uporabljene enakosti razmerij

$$\frac{R - R_0}{R_1 - R_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

izpeljemo tokrat *y*. Iskani kvantil je

$$y = y_0 + \frac{R - R_0}{R_1 - R_0}(y_1 - y_0).$$

Primer

Uporabimo spet uvodni primer: število ležišč v 16 prenočiščih. Ranžirna vrsta je

y	16	18	19	22	24	28	30	33	39	40	45	50	58	60	82	90
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Izračunajmo prvi kvartil in tretji decil.

Kvantilni rang prvega kvartila Q_1 je $P(Q_1) = 0{,}25$. Pripadajoči rang je

$$R = P \cdot N + 0{,}5 = 0{,}25 \cdot 16 + 0{,}5 = 4{,}5.$$

Zato je $R_0 = 4 < R \le R_1 = 5$ in $y_0 = 22 < y \le y_1 = 24$. Prvi kvartil je torej enak

$$Q_1 = y = y_0 + \frac{R - R_0}{R_1 - R_0}(y_1 - y_0) = 22 + \frac{4{,}5 - 4}{5 - 4}(24 - 22) = 23.$$

Četrtina prenočišč premore kvečjemu po 23 ležišč.

Kvatilni rang tretjega decila D_3 je $P(D_3) = 0{,}30$. Zato je

$$R = P \cdot N + 0{,}5 = 0{,}30 \cdot 16 + 0{,}5 = 5{,}3$$

in $R_0 = 5 < R \le R_1 = 6$ in $y_0 = 24 < y \le y_1 = 28$. Tretji decil je

$$D_3 = y = y_0 + \frac{R - R_0}{R_1 - R_0}(y_1 - y_0) = 24 + \frac{5{,}3 - 5}{6 - 5}(28 - 24) = 25{,}2.$$

Ocenjujemo, da 30 % prenočišč premore kvečjemu po 25 ležišč. □

12.3 RAČUNANJE KVANTILOV IN KVANTILNIH RANGOV IZ FREKVENČNE PORAZDELITVE

Pri frekvenčni porazdelitvi so enote populacije zbrane v razrede. Rang posamezne enote nadomestimo s kumulativo razreda, v katerega sodi ta enota.

Rešimo naslednjo nalogo: ***Danemu kvantilu y izračunajmo pripadajoči kvantilni rang P***. Poiščimo razred, v katerega sodi vrednost *y*. Naj bo to *j*-ti razred, imenujemo ga ***kvantilni razred***. Tedaj velja naslednja ocena (denimo, da so razredi definirani tako, da vsebujejo svojo zgornjo mejo)

$$y_{j,\min} < y \le y_{j,\max}.$$

Rang *R*, ki pripada kvantilu *y*, je tedaj umeščen med kumulativo kvantilnega razreda in kumulativo razreda pred njim.

$$F_{j-1} < R \le F_j$$

Predpostavimo, podobno kot pri obravnavi ranžirnih vrst, da je razmerje med razlikama $R - F_{j-1}$ in $F_j - F_{j-1} = f_j$ (frekvenca kvantilnega razreda) enako razmerju med razlikama $y - y_{j,\min}$ in $y_{j,\max} - y_{j,\min} = d_j$ (širina kvantilnega razreda).

$$\frac{R - F_{j-1}}{f_j} = \frac{y - y_{j,\min}}{d_j}$$

Iz zgornje enačbe izračunamo rang

$$R = F_{j-1} + f_j \cdot \frac{y - y_{j,\min}}{d_j}$$

in kvantilni rang

$$P = \frac{R - 0{,}5}{N}.$$

Primer
Tabela prikazuje grupirane podatke o neto mesečnih plačah zaposlenih v podjetju M4U (prirejeni podatki).

Tabela 36: Neto mesečne plače zaposlenih v podjetju M4U

Neto plača v EUR	f_j	F_j
nad 400 – 600	45	45
nad 600 – 800	355	400
nad 800 – 1.000	290	690
nad 1.000 – 1.200	90	780
nad 1.200 – 1.400	12	792
nad 1.400 – 1.600	4	796
nad 1.600 – 1.800	3	799
nad 1.800 – 2.000	1	800
Skupaj	800	–

Izračunajmo, kolikšen delež zaposlenih zasluži mesečno največ 850 EUR. Kvantil $y = 850$ sodi v tretji razred: $y_{j,\min} = 800 < y < y_{j,\max} = 1000$. Zato je $F_{j-1} = 400 < R \le F_j = 690$, frekvenca kvantilnega razreda $f_j = 290$ in njegova širina $d_j = 200$. Izračunajmo rang

$$R = F_{j-1} + f_j \cdot \frac{y - y_{j,\min}}{d_j} = 400 + 290 \cdot \frac{850 - 800}{200} = 472{,}5.$$

Iskani kvantilni rang je

$$P = \frac{R - 0{,}5}{N} = \frac{472{,}5 - 0{,}5}{800} = 0{,}59 = 59\%.$$

Interpretacija rezultata: 59 % zaposlenih zasluži mesečno največ 850 EUR. □

Rešimo še obratno nalogo: ***Danemu kvantilnemu rangu P poiščimo pripadajoči kvantil y***. Izračunajmo danemu kvantilnemu rangu pripadajoči rang *R*:

$$R = P \cdot N + 0{,}5$$

Kvantilni razred je tisti razred, katerega kumulativa prvič preseže ali doseže rang *R*. Naj bo to *j*-ti razred. Tedaj velja ocena $F_{j-1} < R \le F_j$ za iskani kvantil pa ocena $y_{j,\min} < y \le y_{j,\max}$. Iz enakosti

$$\frac{R - F_{j-1}}{f_j} = \frac{y - y_{j,\min}}{d_j}$$

zdaj izrazimo kvantil y:

$$y = y_{j,\min} + d_j \cdot \frac{R - F_{j-1}}{f_j}.$$

Primer
Uporabimo že znano frekvenčno porazdelitev zaposlenih v podjetju M4U in izračunajmo tretji kvartil.

Tabela 37: Neto mesečne plače zaposlenih v podjetju M4U

Neto plača v EUR	f_j	F_j
nad 400 – 600	45	45
nad 600 – 800	355	400
nad 800 – 1.000	290	690
nad 1.000 – 1.200	90	780
nad 1.200 – 1.400	12	792
nad 1.400 – 1.600	4	796
nad 1.600 – 1.800	3	799
nad 1.800 – 2.000	1	800
Skupaj	800	–

Tretjemu kvartilu Q_3 pripada kvantilni rang $P(Q_3) = 0{,}75$. Zato je

$$R = P \cdot N + 0{,}5 = 0{,}75 \cdot 800 + 0{,}5 = 600{,}5\,.$$

Kumulativa preseže izračunani rang prvič v tretjem razredu, zato je

$$F_{j-1} = 400 < R \le F_j = 690\,,\; y_{j,\min} = 800 < y \le y_{j,\max} = 1.000\,,$$

frekvenca kvantilnega razreda $f_j = 290$ in njegova širina $d_j = 200$. Iskani kvartil je torej

$$Q_3 = y = y_{j,\min} + d_j \cdot \frac{R - F_{j-1}}{f_j} = 800 + 200 \cdot \frac{850 - 800}{290} = 834{,}48 \text{ EUR.}$$

Interpretacija: tri četrtine zaposlenih zasluži mesečno največ 834,48 EUR. □

Sklep
S kvantili in s kvantilnimi rangi smo prodrli v notranjo strukturo populacije. Izračunati jih znamo iz ranžirne vrste pri diskretnih spremenljivkah in iz frekvenčne porazdelitve pri zveznih. Tako oboroženi se lahko lotimo naslednjega poglavja.

***

NALOGE

12.1. K pisnemu izpitu je pristopilo 15 študentov. Predavatelj je njihove izdelke ovrednotil s točkami, največji možni dosežek je bil 80 točk. Spodnja tabela prikazuje ranžirno vrsto, v kateri so zbrani podatki o dosežkih študentov (y je število doseženih točk).

y	16	27	35	41	42	45	48	49	54	56	60	66	68	70	76
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Izračunajte vse tri kvartile, ter prvi in deveti decil. S kvantili ocenite delež tistih študentov, ki so dosegli kvečjemu 40 točk.

12.2. Tabela prikazuje dosežene ocene 180 študentov pri pisnem izpitu (prirejeni podatki). Razredi so stični: spodnja meja razreda, ki pripada npr. oceni 7, je 6,5, njegova zgornja meja pa je 7,5.

Tabela 38: Dosežene ocene študentov pri pisnem izpitu

Ocena y_j	$y_{j,\min}$	$y_{j,\max}$	Št. študentov f_j
5			2
6			24
7			60
8			64
9			24
10			6
Σ			180

Izračunajte vse tri kvartile, ter prvi in deveti decil.

12.3. Spodnja tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev 50 trgovin po površini prodajnega prostora (prirejeni podatki).

Tabela 39: Frekvenčna porazdelitev trgovin po površini prodajnega prostora

Površina prodajnega prostora v m^2	f_j
nad 40 do 80	2
nad 80 do 120	8
nad 120 do 160	30
nad 160 do 200	9
nad 200 do 240	1
Σ	50

a) Izračunajte vse tri kvartile, ter prvi in deveti decil.
b) Ocenite površino prodajnega prostora, s katero razpolaga 30 % najmanjših trgovin.
c) Ocenite delež tistih trgovin, ki razpolagajo največ z 150 m^2 prodajnega prostora.

d) Ocenite delež tistih trgovin, pri katerih se površina prodajnega prostora giblje med 150 m^2 in 180 m^2.

13 SREDNJE VREDNOSTI

Nadaljujmo z analizo notranje strukture populacije glede na opazovano statistično spremenljivko. V številnih primerih frekvenčnih porazdelitev lahko opazimo, da se vrednosti spremenljivke zgostijo okrog neke vrednosti (v bolj ohlapnem jeziku: okrog povprečja); veliki odkloni od te vrednosti so precej bolj redki. Pravimo, da ima spremenljivka centralno tendenco. O tem bomo razpravljali v tem poglavju.

13.1 ARITMETIČNA SREDINA

Navadna aritmetična sredina *N* števil $x_1, x_2, \ldots, x_N$ je število

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i .$$

Znak $\sum$ na desni strani formule pomeni seštevek členov x_i, pri čemer preteče sumacijski indeks *i* vsa naravna števila od 1 do *N*.

Primer

Aritmetična sredina števil *a* in *b* je število $\frac{a+b}{2}$. Aritmetična sredina števil x_1, x_2, x_3 je število $M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$. □

Na številski premici pripada vsakemu številu natanko določena točka. Aritmetična sredina števil *a* in *b* je tisto število, ki leži na številski premici natanko na sredini daljice s krajišči v točkah *a* in *b*. Od tod izraz ″sredina″.

Primer

Mesečni osebni dohodki štirih zaposlenih v majhnem podjetju so 850 EUR, 950 EUR, 1.200 EUR in 1.800 EUR. Kolikšen je povprečni mesečni dohodek?

Povprečni mesečni dohodek je navadna aritmetična sredina posameznih dohodkov, torej

$$M = \frac{850 + 950 + 1.200 + 1.800}{4} = 1.200 \text{ EUR.}$$ □

Če nastopa v vrsti podatkov nek podatek večkrat, mu pripišemo ***frekvenco*** *f*, tj. število, ki pove, kolikokrat ta podatek nastopa v vrsti. Tako imamo med *N* podatki *r* različnih vrednosti

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ z ustreznimi frekvencami $f_1, f_2, \ldots f_r$. Število x_1 nastopa v vrsti f_1-krat, število x_2 nastopa f_2-krat itn. Vsota frekvenc je seveda enaka številu vseh podatkov *N*, velja torej $f_1 + f_2 + \ldots + f_r = N.$ Takemu prikazu podatkov pravimo ***frekvenčna porazdelitev***.
V tem primeru izračunamo aritmetično sredino s formulo

$$M = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_r x_r}{f_1 + f_2 + \cdots + f_r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{r} f_i x_i$$

Temu izrazu pravimo ***tehtana aritmetična sredina***, frekvencam f_i pa pravimo ***uteži*** ali ***ponderji***.

Primer
Z delnicami neke gospodarske družbe so v trgovalnem dnevu sklenili 5 poslov. Prodali so 120 delnic po tečaju 125 EUR, 82 delnic po 122 EUR, 500 delnic po 127 EUR, 18 delnic po 130 EUR in 10 delnic po 136 EUR. Izračunajmo povprečni dnevni tečaj delnice.

Povprečni dnevni tečaj je tehtana aritmetična sredina tečajev, po katerih so bili sklenjeni posli, pri čemer je frekvenca posameznega tečaja število delnic, ki so bile prodane po tej ceni. Tako dobimo povprečni dnevni tečaj

$$M = \frac{120 \cdot 125 + 82 \cdot 122 + 500 \cdot 127 + 18 \cdot 130 + 10 \cdot 136}{120 + 82 + 500 + 18 + 10} = \frac{92.204}{730} = 126{,}31 \text{ EUR.}$$

V zadnjem ulomku je lepo razvidna vsebina aritmetične sredine. Skupno vrednost vse petih poslov 92.204 EUR smo enakomerno razdelili na skupno število 730 prodanih delnic. Uporaba navadne aritmetične sredine bi bila v tem primeru huda vsebinska napaka, saj bi dobili močno precenjen dnevni tečaj $\frac{125 + 122 + 127 + 130 + 136}{5} = 128 \text{ EUR.}$ □

Pri velikem številu podatkov (npr. pri statističnih obdelavah) so podatki zbrani v razrede, ki zajemajo ves interval vrednosti med spodnjo in zgornjo mejo razreda. Frekvenca posameznega razreda je tedaj število podatkov, ki sodijo v ta razred; reprezentativna vrednost, ki predstavlja podatke v tem razredu, pa je njegova sredina. S temi podatki izračunana tehtana aritmetična sredina seveda ni natančna aritmetična sredina. Dobimo le oceno zanjo. Oznaka za oceno aritmetične sredine je M^*.

Primer
Tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev telesne višine zaposlenih v podjetju (prirejeni podatki). Ocenimo povprečno telesno višino zaposlenih.

Tabela 40: Frekvenčna porazdelitev zaposlenih glede na telesno višino

Razred	Telesna višina v cm	f_i
1	od 155 do pod 165	482
2	od 165 do pod 175	635
3	od 175 do pod 185	418
4	od 175 do pod 195	105
5	od 195 do pod 205	20
$\sum$		1660

Vrednosti statistične spremenljivke – telesne višine označimo, kot običajno pri frekvenčnih porazdelitvah, s črko y. Dodajmo tabeli stolpec s sredinami razredov y_i in stolpec produktov $f_i y_i$, spodaj pa še vrstico z vsoto frekvenc in vsoto produktov $f_i y_i$.

Tabela 41: Frekvenčna porazdelitev zaposlenih glede na telesno višino

Razred	Telesna višina v cm	f_i	Sredina y_i	$f_i y_i$
1	od 155 do pod 165	482	160	77.120
2	od 165 do pod 175	635	170	107.950
3	od 175 do pod 185	418	180	75.240
4	od 175 do pod 195	105	190	19.950
5	od 195 do pod 205	20	200	4.000
$\sum$	–	1.660	–	284.260

Ocena za povprečno telesno višino zaposlenih je tehtana aritmetična sredina

$$M^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5} f_i y_i = \frac{284.260}{1.660} = 171{,}24\,\text{cm}. \qquad \square$$

13.2 MEDIANA

Mediana (središčna vrednost) je tista vrednost, ki razpolovi populacijo: na eni polovici enot doseže statistična spremenljivka manjše vrednosti od mediane, na drugi polovici pa večje vrednosti.

Denimo, da šteje populacija N enot. Vrednosti, ki jih doseže statistična spremenljivka na populaciji uredimo po velikosti. Tako dobimo ranžirno vrsto

$$y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_N .$$

Vsaki enoti priredimo ***rang***, ki pove, na katerem mestu ranžirne vrste je vrednost y, ki pripada tej enoti. Npr.: enoti, na kateri je vrednost spremenljivke enaka y_3 pripada rang 3. Enotam populacije pripadajo rangi

$$1, 2, \ldots, N.$$

Mediani pripada rang

$$R = \frac{N+1}{2}.$$

Če je N liho število, je R celo število – mediana je tedaj enaka tisti vrednosti v ranžirni vrsti, ki ji pripada izračunani rang R. Pri sodem številu N pa je rang R med dvema sosednjima celima številoma. Mediana je tedaj enaka aritmetični sredini tistih dveh vrednosti v ranžirni vrsti, ki pripadajo tema dvema številoma. Za mediano uporabimo oznako Me in zapišimo na kratko:

če je N liho število, je $Me = y_R$,

če je N sodo število, je $Me = \dfrac{y_{R-0,5} + y_{R+0,5}}{2}$.

Pozorni bralec je v mediani gotovo prepoznal kvantil, ki ustreza kvantilnemu rangu $P = 0{,}5$, saj je njegov pripadajoči rang $R = N \cdot P + 0{,}5 = N \cdot 0{,}5 + 0{,}5 = N \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{N+1}{2}$ ravno medialni rang. Tako je mediana npr. enaka drugemu kvartilu Q_2 ali pa petemu decilu D_5.

Primer

Zbrali smo podatke o mesečnih osebnih dohodkih 12 zaposlenih v majhnem podjetju. Podatke uredimo v ranžirno vrsto

y	683	720	724	855	904	920	1.022	1.260	1.277	1.548	1.906	2.480
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Ker je število zaposlenih $N = 12$, je mediani rang enak $R = \frac{N+1}{2} = \frac{12+1}{2} = 6{,}5$. Mediano izračunamo po formuli za sodo število N:

$$Me = \frac{y_{R-0,5} + y_{R+0,5}}{2} = \frac{y_{6,5-0,5} + y_{6,5+0,5}}{2} = \frac{y_6 + y_7}{2} = \frac{920 + 1.022}{2} = 971 \text{ EUR}.$$

Interpretirajmo rezultat. Mediana razpolovi opazovano populacijo: polovica zaposlenih zasluži mesečno manj kot 971 EUR, druga polovica zaposlenih pa več kot 971 EUR. □

Pri računanju mediane iz frekvenčne porazdelitve poiščemo najprej razred, v katerem leži mediana. ***Medialni razred*** je tisti razred, pri katerem kumulativa frekvenc prvič preseže (ali doseže) rang $R = \frac{N+1}{2}$. Velja torej sklep: če je $F_{j-1} < R \le F_j$, je *j*-ti razred medialni razred. Zaradi enostavnejšega zapisa preimenujemo kumulativo F_j medialnega razreda v F_0, kumulativo F_{j-1} razreda pred medialnim pa v F_{-1}.

Oceno za mediano (oznaka Me^*) izračunamo s formulo

$$Me^* = y_{0,\min} + d_0 \cdot \frac{R - F_{-1}}{f_0}.$$

Pri tem je $y_{0,\min}$ spodnja meja medialnega razreda, d_0 širina medialnega razreda in f_0 frekvenca medialnega razreda.

Primer
Obravnavajmo še enkrat frekvenčno porazdelitev telesne višine 1660 zaposlenih v podjetju.

Tabela 42: Frekvenčna porazdelitev zaposlenih glede na telesno višino

Razred	Telesna višina v cm	f_j
1	od 155 do pod 165	482
2	od 165 do pod 175	635
3	od 175 do pod 185	418
4	od 175 do pod 195	105
5	od 195 do pod 205	20
$\sum$	–	1.660

V razdelku o aritmetični sredini smo ocenili, da je povprečna telesna višina zaposlenih $M^* = 171{,}24\,\text{cm}$. Ocenimo zdaj še mediano. Dodajmo tabeli stolpec s kumulativami absolutnih frekvenc razredov in stolpec s kumulativami relativnih frekvenc (tega bomo uporabili pri grafičnem ocenjevanju mediane).

Tabela 43: Frekvenčna porazdelitev zaposlenih glede na telesno višino

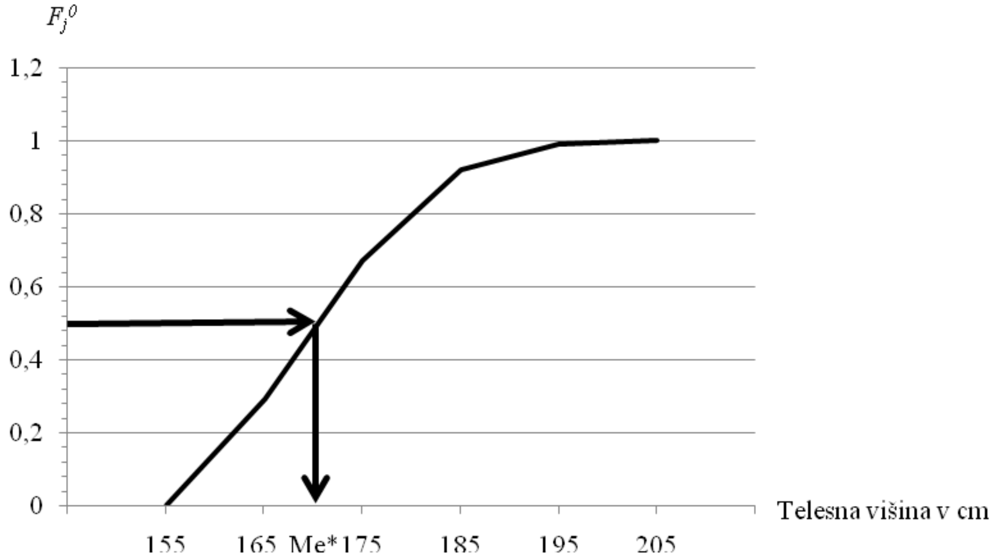
Razred	Telesna višina v cm	f_j	F_j	F_j^0
1	od 155 do pod 165	482	482	0,290
2	od 165 do pod 175	635	1.117	0,673
3	od 175 do pod 185	418	1.535	0,925
4	od 175 do pod 195	105	1.640	0,988
5	od 195 do pod 205	20	1.660	1
$\sum$	–	1.660	–	

Medialni rang je $R = \frac{N+1}{2} = \frac{1.660+1}{2} = 830{,}5$. Medialni razred je drugi razred frekvenčne porazdelitve, saj je njegova kumulativa $F_2 = 1.117$ tista, ki prva preseže medialni rang. To kumulativo zdaj preimenujemo v $F_0 = 1.117$, kumulativo razreda pred medialnim razredom pa v $F_{-1} = 482$. Spodnja meja medialnega razreda je $y_{0,\min} = 165$ cm, njegova širina $d_0 = 175 - 165 = 10$ cm in njegova frekvenca $f_0 = 635$. Uporabimo obrazec za oceno mediane.

$$Me^* = y_{0,\min} + d_0 \cdot \frac{R - F_{-1}}{f_0} = 165 + 10 \cdot \frac{830{,}5 - 482}{635} = 170{,}49\ \text{cm}.$$

Ocenjujemo, da je telesna višina 170,49 cm tista, ki razpolovi populacijo: telesna višina polovice zaposlenih je manjša, telesna višina druge polovice pa večja od te vrednosti.

Mediano lahko ocenimo tudi grafično. Na grafu kumulative relativnih frekvenc poiščemo točko z ordinato 0,5 (na polovici enot populacije doseže statistična spremenljivka manjše vrednosti od mediane). Abscisa te točke je enaka oceni za mediano. Spodnja slika prikazuje opisani postopek.



Slika 13: Grafično ocenjevanje mediane

13.3 MODUS

Modus (gostiščnica) je tista vrednost statistične spremenljivke, ki se največkrat pojavi. Pri računanju modusa iz posameznih vrednosti poiščemo tisto vrednost spremenljivke, ki se največkrat pojavi. Modus je enak tej vrednosti.

Modus je definiran samo za frekvenčne porazdelitve z enako širokimi razredi. Pri računanju modusa iz take porazdelitve poiščemo najprej ***modalni razred***, to je razred z največjo frekvenco. Oceno za modus (oznaka Mo^*) izračunamo s formulo

$$Mo^* = y_{0,\min} + d_0 \cdot \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}}.$$

Pri tem je $y_{0,\min}$ spodnja meja modalnega razreda, d_0 širina modalnega razreda, f_0 frekvenca modalnega razreda, f_{-1} frekvenca razreda pred modalnim razredom in f_{+1} frekvenca razreda za modalnim razredom.

Primer
Ocenimo modus frekvenčne porazdelitve telesne višine 1.660 zaposlenih v podjetju.

Tabela 44: Frekvenčna porazdelitev zaposlenih glede na telesno višino

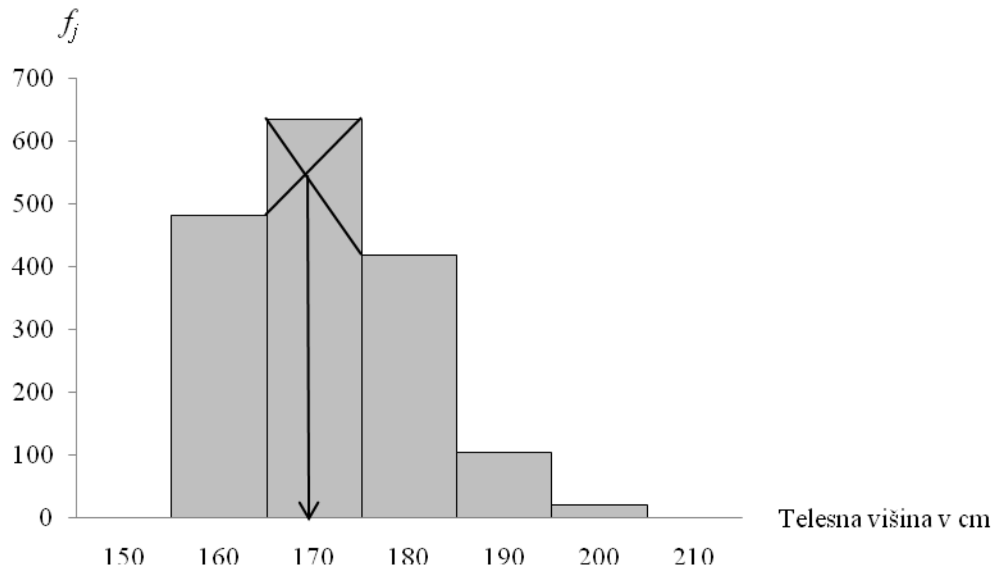
Razred	Telesna višina v cm	f_j
1	od 155 do pod 165	482
2	od 165 do pod 175	635
3	od 175 do pod 185	418
4	od 175 do pod 195	105
5	od 195 do pod 205	20
$\sum$	–	1.660

Modalni razred je očitno drugi razred porazdelitve, saj ima ta največjo frekvenco. Zato je spodnja meja modalnega razreda $y_{0,\min} = 165$ cm, njegova širina $d_0 = 175 - 165 = 10\text{cm}$ in njegova frekvenca $f_0 = 635$. Frekvenca razreda pred modalnim je $f_{-1} = 482$ in frekvenca razreda za njim $f_{+1} = 418$. Uporabimo zgornji obrazec.

$$Mo^* = y_{0,\min} + d_0 \cdot \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}} = 165 + 10 \cdot \frac{635 - 482}{2 \cdot 635 - 482 - 418} = 169{,}14\,\text{cm}$$

Spomnimo se že izračunanih ocen za aritmetično sredino in modus te porazdelitve: $M^* = 171{,}24\,\text{cm}$, $Me^* = 170{,}49\,\text{cm}$. Očitno velja $Mo^* < Me^* < M^*$. Pri analizi asimetrije frekvenčnih porazdelitev bomo ugotovili, da kaže tak odnos med temi tremi srednjimi vrednostmi na asimetrijo v desno, proti večjim vrednostim. To pomeni, da tisti del populacije, pri katerem statistična spremenljivka presega srednje vrednosti, prevladuje nad drugim delom populacije, pri katerem ima statistična spremenljivka manjše vrednosti.

Na histogramu frekvenčne porazdelitve lahko modus ocenimo tudi grafično. Uporabimo tri stolpce: najvišjega, ki pripada modalnemu razredu in oba stolpca ob njem. Z eno daljico povežemo zgornji levi oglišči srednjega (modalnega) in desnega stolpca, z drugo pa zgornji desni oglišči srednjega in levega stolpca. Abscisa presečišča teh daljic je enaka izračunani oceni za modus. Spodnja slika prikazuje opisani postopek.



Slika 14: Grafično ocenjevanje modusa

□

13.4 HARMONIČNA SREDINA

Harmonična sredina števil $x_1, x_2, \ldots x_N$ je število

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}.$$

Tehtana harmonična sredina *r* različnih števil $x_1, x_2, \ldots x_r$ s frekvencami $f_1, f_2, \ldots f_r$, pri čemer velja $f_1 + f_2 + \ldots + f_r = N$, je število

$$H = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_r}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \cdots + \frac{f_r}{x_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{r} \frac{f_r}{x_i}}.$$

Primer

Podjetje je v preteklem letu prodajalo tri izdelke. S prvim je realiziralo promet 200.000 EUR, z drugim 150.000 EUR in s tretjim 300.000 EUR. Letni koeficient obračanja zalog je bil pri prvem izdelku 16, pri drugem 18 in pri tretjem 22. Izračunajmo povprečni letni koeficient obračanja zalog.

Letni koeficient obračanja zalog *K* je razmerje med letnim prometom *Y* in povprečnim stanjem zalog *X*, torej $K = \frac{Y}{X}$. Iz danih podatkov lahko torej izračunamo povprečno stanje zalog posameznega izdelka s formulo $X = \frac{Y}{K}$. Povprečno stanje zalog vseh treh izdelkov je zato $\frac{200.000}{16} + \frac{150.000}{18} + \frac{300.000}{22}$, skupni promet pa je bil $200.000 + 150.000 + 300.000$. Zdaj lahko izračunamo povprečni koeficient obračanja zalog:

$$\overline{K} = \frac{200.000 + 150.000 + 300.000}{\frac{200.000}{16} + \frac{150.000}{18} + \frac{300.000}{22}} = 18{,}86.$$

Iz strukture zgornjega ulomka razberemo, da je letni koeficient obračanja zalog harmonična sredina danih koeficientov za posamezen izdelek. □

Primer

Zaključimo poglavje s preprosto ″šofersko″ nalogo. Kraja A in B sta oddaljena 100 km. Od kraja A do kraja B smo se vozili s hitrostjo 100 km/h, nazaj pa s hitrostjo 50 km/h. Kolikšna je bila povprečna hitrost tega potovanja?

Povprečno hitrost izračunamo tako, da skupno dolžino prevožene poti $100+100=200$ km delimo s porabljenim časom. Za pot od A do B smo porabili $\frac{100\text{ km}}{100\text{ km/h}}=1\text{ h}$, za pot nazaj pa $\frac{100\text{ km}}{50\text{ km/h}}=2\text{ h}$, skupaj 3 ure. Potovali smo torej s povprečno hitrostjo

$$\bar{v}=\frac{100+100}{\frac{100}{100}+\frac{100}{50}}=\frac{200}{3}=66{,}67\text{ km/h}.$$

Iz zgradbe zgornjega ulomka razberemo, da je povprečna hitrost harmonična sredina hitrosti na posameznih odsekih poti, uteži pa so dolžine ustreznih odsekov. Bralec, ki je morda zmotno pomislil na aritmetično sredino $\frac{100+50}{2}=75\text{ km/h}$, bo presenečen nad tem, kje lahko naletimo na harmonično sredino. □

13.5 GEOMETRIJSKA SREDINA – POVPREČNI KOEFICIENT RASTI, POVPREČNI VERIŽNI INDEKS, POVPREČNA STOPNJA RASTI

Geometrijska sredina N pozitivnih števil $x_1, x_2, \ldots, x_N$ je število

$$G=\sqrt[N]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_N}$$

Primer
Izračunajmo geometrijsko sredino števil 2, 4 in 8. Gre za 3 podatke, zato izračunamo geometrijsko sredino s tretjim korenom.

$$G=\sqrt[3]{2\cdot 4\cdot 8}=\sqrt[3]{64}=4$$ □

Kje naletimo na geometrijsko sredino? V poglavju o indeksih smo obravnavali koeficiente rasti. Ugotovili smo, da je lahko podatek Y_j časovne vrste $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ izračunamo iz začetnega podatka Y_0 s koeficienti rasti: $Y_j=Y_0\cdot K_1\cdot K_2\cdot K_3\cdot\ldots\cdot K_{j-1}\cdot K_j$. Zadnji podatek vrste je tedaj enak

$$Y_n=Y_0\cdot K_1\cdot K_2\cdot K_3\cdot\ldots\cdot K_{n-1}\cdot K_n.$$

Povprečni koeficient rasti $\overline{K}$ je tak koeficient, ki nam da pri n-kratni uporabi enako končno vrednost Y_n. Če bi se opazovani pojav v celotnem opazovanem obdobju razvijal s konstantnim koeficientom rasti, bi bilo njegovo končno stanje pri enakem začetnem stanju Y_0 enako Y_n. Velja torej

$$Y_n=Y_0\cdot\overline{K}\cdot\overline{K}\cdot\ldots\cdot\overline{K}=Y_0\cdot\overline{K}^{\,n}.$$

Izenačimo oba zgornja izraza za Y_n,

$$Y_0 K_1 K_2 K_3 \ldots\ K_{n-1} K_n = Y_0 \cdot \overline{K}^{\,n}$$

pa ugotovimo

$$\overline{K} = \sqrt[n]{K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_n}.$$

Povprečni koeficient rasti je geometrijska sredina posameznih koeficientov rasti. Iz enakosti $Y_n = Y_0 \cdot \overline{K}^{\,n}$ pa lahko izpeljemo še eno, zelo priročno formulo za izračun povprečnega koeficienta rasti.

$$\overline{K} = \sqrt[n]{\frac{Y_n}{Y_0}}$$

Iz že znanih zvez med verižnimi indeksi, koeficienti rasti in stopnjami rasti dobimo dva enostavna obrazca za ***izračun povprečnega verižnega indeksa***

$$\overline{V} = \overline{K} \cdot 100 = \sqrt[n]{\frac{Y_n}{Y_0}} \cdot 100$$

in za ***izračun povprečne stopnje rasti***

$$\overline{S} = \overline{V} - 100.$$

Bralec se lahko sam prepriča, da je tudi povprečni verižni indeks geometrijska sredina posameznih verižnih indeksov, torej

$$\overline{V} = \sqrt[n]{V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_n}.$$

Primer

Tabela prikazuje število prenočitev turistov v Sloveniji v obdobju 2000–2006. Izračunajmo koeficiente rasti, povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti.

Tabela 45: Število prenočitev turistov v Sloveniji v obdobju 2000–2006

Leto	Število prenočitev turistov v 1.000	Koeficienti rasti
2000	6.719	–
2001	7.130	1,061
2002	7.321	1,027
2003	7.503	1,025
2004	7.589	1,011
2005	7.572	0,998
2006	7.722	1,020

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2007

V časovni vrsti je 6 koeficientov rasti ($n = 6$), zato je povprečni koeficient rasti enak

$$\overline{K} = \sqrt[6]{\frac{Y_6}{Y_0}} = \sqrt[6]{\frac{7.722}{6.719}} = 1{,}023.$$

Za primerjavo uporabimo še izhodiščno formulo.

$$\overline{K} = \sqrt[6]{K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_6} = \sqrt[6]{1{,}061 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}011 \cdot 0{,}998 \cdot 1{,}020} = 1{,}023$$

Povprečni verižni indeks je torej $\overline{V} = \overline{K} \cdot 100 = 1{,}023 \cdot 100 = 102{,}3$. Povprečna stopnja rasti je $\overline{S} = \overline{V} - 100 = 102{,}3 - 100 = 2{,}3\,\%$. V opazovanem obdobju je število prenočitev turistov naraščalo povprečno za 2,3 odstotka letno.

S pridobljenimi rezultati lahko napovemo število prenočitev v letu 2008 ob predpostavki, da se bo do konca leta 2008 ohranila dinamika rasti iz opazovanega obdobja v letih 2000–2006. Zadnji podatek v časovni vrsti velja za leto 2006. Do leta 2008 mineta dve leti, zato moramo na tem podatku dvakrat uporabiti povprečni koeficient rasti.

$$Y_{2008} = Y_{2006} \cdot \overline{K}^2 = 7.722 \cdot 1{,}023^2 = 8.081$$

Ob izbrani predpostavki lahko v letu 2008 pričakujemo 8.081.000 prenočitev turistov. □

Sklep
Obdelali smo vse srednje vrednosti: aritmetično, geometrijsko in harmonično sredino, mediano in modus; z njimi smo prodrli še globlje v strukturo statistične populacije. Definirali smo povprečne koeficiente rasti, povprečne verižne indekse in povprečne stopnje rasti ter z njimi nazorno ovrednotili dinamiko časovnega poteka opazovanega pojava.

***

NALOGE

13.1. Tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev prodajaln po površini prodajnega prostora. Izračunajte oceno za aritmetično sredino, oceno za mediano in oceno za modus.

Tabela 46: Frekvenčna porazdelitev prodajaln po površini prodajnega prostora

Površina prodajnega prostora v m^2	y_j	f_j	F_j		
od 50 do pod 70		4			
od 70 do pod 90		6			
od 90 do pod 110		8			
od 110 do pod 130		10			
od 130 do pod 150		17			
od 150 do pod 170		11			
od 170 do pod 190		7			

od 190 do pod 210		2			
Skupaj	–	$N = 65$	–	–	

13.2. Tabela prikazuje ocene 180 študentov pri pisnem izpitu. Izračunajte aritmetično sredino, oceno za mediano in oceno za modus.

Tabela 47: Dosežene ocene študentov pri pisnem izpitu

Ocena y_j	$y_{j,\min}$	$y_{j,\max}$	Št. študentov f_j			
5			2			
6			24			
7			60			
8			64			
9			24			
10			6			
Skupaj			180			

13.3. Tabela prikazuje grupirane podatke o neto mesečnih plačah zaposlenih v podjetju U4U. Izračunajte oceno za aritmetično sredino, oceno za mediano in oceno za modus.

Tabela 48: Neto mesečne plače zaposlenih v podjetju U4U

Neto plača v EUR	y_j	f_j	F_j		
nad 400 – 600		45			
nad 600 – 800		355			
nad 800 – 1.000		290			
nad 1.000 – 1.200		90			
nad 1.200 – 1.400		12			
nad 1.400 – 1.600		4			
nad 1.600 – 1.800		3			
nad 1.800 – 2.000		1			
Skupaj	–	800	–		

13.4. Tabela prikazuje podatke o številu prebivalcev in številu avtomobilov v treh občinah (prirejeni podatki). Izračunajte povprečno število prebivalcev na avtomobil v vseh treh občinah skupaj.

Tabela 49: Številu prebivalcev in število avtomobilov v občinah A, B in C

Občina	Število prebivalcev	Število avtomobilov	Št. prebivalcev na avtomobil
A	16.320		3,2
B	10.530		3
C	8.120		2,8
Σ			

13.5. Tabela prikazuje število prihodov turistov v Republiko Slovenijo od leta 2002 do leta 2007.

a) Dopolnite tabelo s koeficienti rasti, verižnimi indeksi in stopnjami rasti.
b) Izračunajte povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti.
c) Koliko turistov lahko pričakujemo v letu 2010, če predpostavimo, da bo število turistov do leta 2010 ohranilo povprečno dinamiko rasti iz obdobja 2002–2007?

Tabela 50: Prihodi turistov v Republiko Slovenijo od leta 2002 do leta 2007

Leto	Število turistov v 1.000			
2002	2.162			
2003	2.246			
2004	2.341			
2005	2.395			
2006	2.485			
2007	2.681			

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

13.6. Tabela prikazuje povprečne mesečne neto plače na zaposleno osebo pri pravnih osebah v obdobju 2000–2007.

a) Izračunajte povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti.
b) Kolikšno povprečne mesečno neto plačo na zaposleno osebo lahko pričakujemo v letu 2010, če predpostavimo, da se bo do tega leta ohranila dinamika rasti iz obdobja 2000–2007?
c) Kolikšno povprečne mesečno neto plačo na zaposleno osebo lahko pričakujemo v letu 2010, če predpostavimo, da se bo do tega leta ohranila dinamika rasti iz obdobja 2004–2007?

Tabela 51: Povprečne mesečne neto plače na zaposleno osebo pri pravnih osebah

Leto	Neto plača v EUR				
2000	503,63				
2001	562,74				
2002	617,37				
2003	663,80				
2004	701,90				
2005	735,73				
2006	773,42				
2007	834,50				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

13.7. Tabela prikazuje število sklenjenih zakonskih zvez v obdobju 1996–2004.

a) Izračunajte povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti.

b) Koliko sklenjenih zakonskih zvez lahko pričakujemo v letu 2010, če predpostavimo, da se bo do leta 2010 ohranila povprečna dinamika rasti iz obdobja 1996–2004?

Tabela 52: Sklenjene zakonske zveze v obdobju 1996–2004

Leto	Št. sklenjenih zakonskih zvez
1996	7.555
1997	7.500
1998	7.528
1999	7.716
2000	7.201
2001	6.935
2002	7.064
2003	6.756
2004	6.558

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2005

13.8. Tabela prikazuje podatke o letnem prometu v mobilni telefoniji v obdobju 2003–2007.

a) Izračunajte povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti.

b) Kolikšen promet v mobilni telefoniji lahko pričakujemo v letu 2014, če predpostavimo, da se bo do tega leta ohranila povprečna dinamika rasti iz obdobja 2003–2007?

Tabela 53: Letni prometu v mobilni telefoniji v obdobju 2003–2007

Leto	Število minut v mobilni telefoniji v mio
2003	2.415
2004	2.328
2005	2.322
2006	2.615
2007	2.875

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

13.9. Tabela prikazuje povprečno letno količino nabavljenih živil na člana gospodinjstva za nekatere vrste živil. Izračunajte bazne indekse z osnovo v letu 2004, verižne indekse, koeficiente rasti in stopnje rasti za posamezne vrste živil. Izračunajte povprečno stopnjo rasti v opazovanem obdobju za posamezne vrste živil.

Tabela 54: Letna količino nabavljenih živil na člana gospodinjstva

Leto	Kruh in pecivo v kg	Vino v litrih
2002	56,8	7,5
2003	52,8	6,9
2004	50,0	7,0
2005	46,1	6,6
2006	42,3	6,1

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

13.10. Tabela prikazuje število registriranih novih osebnih avtomobilov v Sloveniji v obdobju 2000–2005.

Tabela 55: Registrirani novi osebni avtomobili v Sloveniji

Leto	Št. registriranih novih osebnih avtomobilov
2000	63.640
2001	54.834
2002	52.701
2003	61.037
2004	63.704
2005	60.999

Vir: Motorevija, AMZS, januar–februar 2006

a) Izračunajte bazne indekse z osnovo v letu 2002, verižne indekse, koeficiente rasti in stopnje rasti za število registriranih novih osebnih avtomobilov.
b) Izračunajte povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti v opazovanem obdobju.
c) S povprečnim koeficientom rasti napovejte število registriranih novih osebnih avtomobilov v letu 2011, če predpostavimo, da se bo do tega leta ohranila dinamika rasti iz obdobja 2000–2005.

14 MERE VARIABILNOSTI, ASIMETRIJE IN SPLOŠČENOSTI

Ovrednotiti znamo centralno tendenco statistične spremenljivke in jo prikazati s srednjimi vrednostmi. Postavljajo se nam nova vprašanja: So veliki odkloni od srednjih vrednosti v eno ali drugo smer statistično pomembni ali so zanemarljivi? Imajo odkloni k večjim vrednostim (ohlapno rečeno: v desno) večjo težo od odklonov v nasprotno smer, k manjšim vrednostim? Odgovore podamo v tem poglavju.

14.1 MERE VARIABILNOSTI

Mere variabilnosti so statistični parametri, ki kažejo, v kolikšni meri se vrednosti statistične spremenljivke med seboj razlikujejo oziroma v kolikšni meri odstopajo od svojih srednjih vrednosti.

Najenostavnejša mera variabilnosti je ***variacijski razmik***:

$$VR = y_{\max} - y_{\min}$$

Gre za razliko med največjo in najmanjšo vrednostjo spremenljivke. Variacijski razmik je izračunljiv le iz znanih posamičnih vrednosti spremenljivke.

Kvartilni razmik je enak razliki med tretjim in prvim kvartilom.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Z njim ocenimo, za koliko se glede na vrednosti spremenljivke *Y* razlikujejo enote iz osrednje polovice populacije. To ugotovitev lahko formuliramo tudi takole: kvartilni razmik pove, za koliko se najmanj razlikujejo vrednosti, ki jih spremenljivka *Y* doseže na zgornji in na spodnji četrtini populacije.

Primer
Uporabimo že znan primer 16 prenočišč, ki jih imajo v neki občini. Statistična spremenljivka je število ležišč. Ranžirna vrsta je

y	16	18	19	22	24	28	30	33	39	40	45	50	58	60	82	90
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Izračunajmo kvartilni razmik. Za prvi kvartil izračunamo

$$P = 0{,}25 \Rightarrow R = P \cdot N + 0{,}5 = 0{,}25 \cdot 16 + 0{,}5 = 4{,}5.$$

Zato je $R_0 = 4 < R \le R_1 = 5$ in $y_0 = 22 < y \le y_1 = 24$. Prvi kvartil je torej enak

$$Q_1 = y = y_0 + \frac{R - R_0}{R_1 - R_0}(y_1 - y_0) = 22 + \frac{4,5-4}{5-4}(24-22) = 23.$$

Za tretji kvartil je

$$P = 0,75 \Rightarrow R = P \cdot N + 0,5 = 0,75 \cdot 16 + 0,5 = 12,5.$$

Zdaj velja $R_0 = 12 < R \leq R_1 = 13$ in $y_0 = 50 < y \leq y_1 = 58$. Tretji kvartil je

$$Q_3 = y = y_0 + \frac{R - R_0}{R_1 - R_0}(y_1 - y_0) = 50 + \frac{12,5-12}{13-12}(58-50) = 54.$$

Kvartilni razmik je torej enak

$$Q = Q_3 - Q_1 = 54 - 23 = 31.$$

Interpretirajmo rezultat: v osrednji polovici prenočišč se ta po številu ležišč med seboj razlikujejo za največ 31 ležišč. Z drugimi besedami: prenočišče, ki sodi med četrtino največjih prenočišč in prenočišče, ki sodi med četrtino najmanjših, se po številu ležišč razlikujeta vsaj za 31 ležišč. □

Decilni razmik je enak razliki med devetim in prvim decilom.

$$D = D_9 - D_1$$

Z njim ocenimo, za koliko se glede na vrednosti spremenljivke Y razlikujejo enote iz osrednjih 80 % populacije. Z drugimi besedami: decilni razmik pove, za koliko se najmanj razlikujejo vrednosti, ki jih spremenljivka Y doseže na zgornji in na spodnji desetini populacije.

Primer

Uporabimo porazdelitev iz zgornjega primera in izračunajmo njen decilni razmik. Izračunajmo prvi decil.

$$P = 0,10 \Rightarrow R = P \cdot N + 0,5 = 0,10 \cdot 16 + 0,5 = 2,1$$

$$R_0 = 2 < R \leq R_1 = 3 \Rightarrow y_0 = 18 < y \leq y_1 = 19$$

$$D_1 = y = y_0 + \frac{R - R_0}{R_1 - R_0}(y_1 - y_0) = 18 + \frac{2,1-2}{3-2}(19-18) = 18,1$$

Izračunajmo deveti decil.

$$P = 0,90 \Rightarrow R = P \cdot N + 0,5 = 0,90 \cdot 16 + 0,5 = 14,9$$

$$R_0 = 14 < R \leq R_1 = 15 \Rightarrow y_0 = 60 < y \leq y_1 = 82$$

$$D_9 = y = y_0 + \frac{R - R_0}{R_1 - R_0}(y_1 - y_0) = 60 + \frac{14{,}9 - 14}{15 - 14}(82 - 60) = 79{,}8$$

Decilni razmik je torej enak

$$D = D_9 - D_1 = 79{,}8 - 18{,}1 = 61{,}7.$$

Interpretacija: v osrednjih 80 % prenočišč se ta po številu ležišč med seboj razlikujejo za manj kot 62 ležišč. Povejmo še drugače: prenočišče, ki sodi med 10 % največjih prenočišč in prenočišče, ki sodi med 10 % najmanjših, se po številu ležišč razlikujeta za vsaj 62 ležišč. □

Naj bo Y diskretna statistična spremenljivka, ki zavzame vrednosti $y_1, y_2, \ldots y_N$ na N enotah populacije, njena aritmetična sredina naj bo M, mediana pa Me.

Povprečni absolutni odklon od aritmetične sredine je

$$AD_M = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|y_j - M\right|.$$

Povprečni absolutni odklon od mediane je

$$AD_{Me} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|y_j - Me\right|.$$

Pri računanju povprečnih odklonov iz frekvenčne porazdelitve z r razredi upoštevamo frekvence f_j razredov, namesto posameznih vrednosti pa uporabimo reprezentativne vrednosti y_j razredov, torej njihove sredine. Tako dobimo formuli

$$AD_M = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{r} f_j\left|y_j - M\right|$$

$$AD_{Me} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{r} f_j\left|y_j - Me\right|.$$

Primer
Analizirajmo uspeh 15 študentov pri pisnem izpitu. Dosegli so lahko največ 60 točk, njihove rezultate pa prikazuje spodnja ranžirna vrsta.

y	22	25	32	35	36	37	40	42	43	44	46	47	50	55	58
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Izračunajmo aritmetično sredino in mediano porazdelitve.

$$M = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{1}{15}(22 + 25 + 32 + \cdots + 58) = 40{,}8 \text{ točk}$$

Medialni rang je $R = \frac{N+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$, zato je mediana kar enaka številu točk, ki jih je dosegel osmi študent v ranžirni vrsti: $Me = y_8 = 42$ točk.

Izračunajmo povprečni absolutni odklon od aritmetične sredine in povprečni absolutni odklon od mediane.

$$AD_M = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|y_j - M\right| = \frac{1}{15}\left(\left|22-40{,}8\right| + \left|25-40{,}8\right| + \left|32-40{,}8\right| + \cdots + \left|58-40{,}8\right|\right) \approx 7{,}81$$

$$AD_{Me} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|y_j - Me\right| = \frac{1}{15}\left(\left|22-42\right| + \left|25-42\right| + \left|32-42\right| + \cdots + \left|58-42\right|\right) \approx 7{,}73$$

Ker se aritmetična sredina in mediana razlikujeta le za 1,2 točki, je tudi razlika obeh povprečnih odklonov majhna. Rezultati študentov na pisnem izpitu se od aritmetične sredine v povprečju odklanjajo za 7,81 točke, od mediane pa za 7,73 točke. □

Najpomembnejša mera variabilnosti je ***varianca***. Definirana je kot povprečje kvadriranih odklonov vrednosti statistične spremenljivke od aritmetične sredine.

Iz posamičnih vrednosti $y_1, y_2, \ldots y_N$, ki jih spremenljivka zavzame na *N* enotah izračunamo varianco σ^2 po formuli

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(y_j - M)^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}{y_j}^2 - M^2,$$

pri čemer je *M* aritmetična sredina. Prva oblika formule sledi definiciji, druga oblika pa je priročna za računanje.

Iz frekvenčne porazdelitve s sredinami razredov $y_1, y_2, \ldots y_r$, ustreznimi frekvencami $f_1, f_2, \ldots f_r$ in aritmetično sredino *M* dobimo oceno za varianco

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f_j(y_j - M)^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f_j{y_j}^2 - M^2.$$

Prva oblika sledi spet definiciji, druga je namenjena praktičnemu delu.

Pri frekvenčnih porazdelitvah z enako širokimi razredi korigiramo varianco s t. i. ***Sheppardovim popravkom***. Naj bo *d* širina razredov. Korigirana varianca je tedaj enaka

$${\sigma_{cor}}^2 = \sigma^2 - \frac{d^2}{12}.$$

Slabost variance je enota, v kateri jo merimo: ta enota je kvadrat enote, v kateri merimo vrednosti spremenljivke. Zato je v rabi mera variabilnosti, izpeljana iz variance, ki pa nima te slabosti.

Standardni odklon ali ***standardna deviacija*** σ je kvadratni koren variance.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Koeficient variabilnosti je razmerje med standardnim odklonom in aritmetično sredino.

$$KV = \frac{\sigma}{M}$$

Primer
Obravnavajmo še enkrat uspeh 15 študentov pri pisnem izpitu. Števila točk, ki so jih dosegli, so zbrana v spodnji ranžirni vrsti.

y	22	25	32	35	36	37	40	42	43	44	46	47	50	55	58
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Aritmetično sredino te porazdelitve smo že izračunali v zadnjem primeru: $M = 40{,}8$ točk. Izračunajmo varianco porazdelitve. Uporabimo priročnejšo obliko formule.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j^{\,2} - M^2 = \frac{1}{15}\left(22^2 + 25^2 + 32^2 + \cdots + 58^2\right) - 40{,}8^2 \approx 94{,}43$$

Standardni odklon je zato enak

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{94{,}43} \approx 9{,}72 \text{ točke,}$$

koeficient variabilnosti pa

$$KV = \frac{\sigma}{M} = \frac{9{,}72}{40{,}8} = 0{,}238.$$

Standardni odklon je torej nekaj manjši od četrtine aritmetične sredine. □

Primer
Izračunajmo standardni odklon frekvenčne porazdelitve. Spodnja tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev trgovin v regiji po vrednosti prometa (prirejeni podatki).

Tabela 56: Frekvenčna porazdelitev trgovin v regiji po vrednosti prometa

Vrednost prometa v 1.000 EUR	Število trgovin f_j
nad 150–250	8
nad 250–350	11
nad 350–450	27
nad 450–550	32
nad 550–650	18
nad 650–750	9
Skupaj	105

Tabeli dodajmo še nekaj stolpcev, ki nam bodo koristili pri računanju aritmetične sredine in variance.

Tabela 57: Frekvenčna porazdelitev trgovin v regiji po vrednosti prometa

Vrednost prometa v 1.000 EUR	Število trgovin f_j	Sredine razredov y_j	$f_j y_j$	y_j^2	$f_j y_j^2$
nad 150–250	8	200	1.600	40.000	320.000
nad 250–350	11	300	3.300	90.000	990.000
nad 350–450	27	400	10.800	160.000	4.320.000
nad 450–550	32	500	16.000	250.000	8.000.000
nad 550–650	18	600	10.800	360.000	6.480.000
nad 650–750	9	700	300	490.000	4.410.000
Skupaj	105	2.700	48.800	1.390.000	24.520.000

Izračunajmo oceno za aritmetično sredino.

$$M^* = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{r} f_j y_j = \frac{1}{105}\cdot 48.800 \approx 464{,}8$$

Izračunajmo še varianco in standardni odklon.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{r} f_j y_j^{\,2} - M^2 = \frac{1}{105}\cdot 24.520.000 - 464{,}8^2 \approx 17.484{,}8$$

Razredi v porazdelitvi so enake širine ($d = 100$), zato uporabimo Sheppardov popravek variance.

$$\sigma_{cor}^{\;2} = \sigma^2 - \frac{d^2}{12} = 17.484{,}8 - \frac{100^2}{12} = 16.651{,}5$$

Zato je standardni odklon enak

$$\sigma_{cor} = \sqrt{\sigma_{cor}^{\;2}} = \sqrt{16.651{,}5} \approx 129{,}0$$

Vrednost povprečnega prometa v opazovanih trgovinah je 464.800 EUR (podatki v tabeli so v 1.000 EUR). Ta vrednost sodi v najmočnejši, četrti razred. Standardni odklon od te vrednosti pa je 129.000 EUR. Izračunajmo še koeficient variabilnosti.

$$KV = \frac{\sigma}{M} = \frac{129{,}0}{464{,}8} = 0{,}278$$

Standardni odklon torej enak skoraj 28 % aritmetične sredine. □

14.2 MERE ASIMETRIJE

Simetrijo oziroma asimetrijo frekvenčne porazdelitve ocenimo s tremi srednjimi vrednostmi: aritmetično sredino M, mediano Me in modusom Mo. Porazdelitev je:

- ***simetrična***, če je $Mo = Me = M$,
- ***asimetrična v desno***, če je $Mo < Me < M$,
- ***asimetrična v levo***, če je $M < Me < Mo$.

Moč, stopnjo ali izrazitost asimetrije ocenimo s koeficientom asimetrije. Izhodišče za izračun tega koeficienta je lahko modus ali pa mediana.

Koeficient asimetrije, izpeljan iz modusa, je

$$KA_{Mo} = \frac{M - Mo}{\sigma}.$$

Koeficient asimetrije, izpeljan iz mediane, je

$$KA_{Me} = \frac{3(M - Me)}{\sigma}.$$

Stopnja ali jakost asimetrije je sorazmerna absolutni vrednosti teh koeficientov, smer asimetrije je razvidna iz njunega predznaka.

Pri ***simetrični porazdelitvi*** je $Mo = Me = M$, zato sta oba koeficienta asimetrije enaka 0.

$$KA_{Mo} = KA_{Me} = 0.$$

Če je porazdelitev ***asimetrična v desno***, je $Mo < Me < M$ in sta zato oba koeficienta asimetrije pozitivna.

$$KA_{Mo} > 0, \quad KA_{Me} > 0$$

Če je porazdelitev ***asimetrična v levo***, je $M < Me < Mo$ in sta zato oba koeficienta asimetrije negativna.

$$KA_{Mo} < 0, \quad KA_{Me} < 0$$

Primer
Obravnavajmo frekvenčno porazdelitev trgovin po vrednosti mesečnega prometa (prirejeni podatki) in analizirajmo stopnjo njene asimetrije.

Tabela 58: Frekvenčna porazdelitev trgovin po vrednosti mesečnega prometa

Vrednost mesečnega prometa v 1.000 EUR	f_j
od 100 do pod 200	10
od 200 do pod 300	15
od 300 do pod 400	16
od 400 do pod 500	25
od 500 do pod 600	32
od 600 do pod 700	20
od 700 do pod 800	8
od 800 do pod 900	2
Skupaj	$N = 128$

Bralec bo lahko sam preveril naslednje ocene za aritmetično sredino, mediano, modus in standardno deviacijo (rezultati so zapisani v 1.000 EUR): $M^* = 471{,}9$, $Me^* = 494$, $Mo^* = 536{,}8$, $\sigma_{cor} = 140{,}4$. Velikostni odnos med srednjimi vrednostmi $M^* < Me^* < Mo^*$ kaže, da je porazdelitev asimetrična v levo. Podrobnejši pogled na stolpec absolutnih frekvenc nam to potrdi. Hitro opazimo tri močne osrednje razrede (četrti, peti in šesti razred). Razvidno je tudi, da so razredi nad njimi (sedmi in osmi razred) precej šibkejši od tistih pod njimi (prvi, drugi in tretji razred), kar kaže na tendenco spremenljivke proti manjšim vrednostim mesečnega prometa.

Kaj nam o tem povesta koeficienta asimetrije, izpeljana iz modusa in iz mediane?

$$KA_{Mo} = \frac{M - Mo}{\sigma} = \frac{471{,}9 - 536{,}8}{140{,}4} = -0{,}462$$

$$KA_{Me} = \frac{3(M - Me)}{\sigma} = \frac{3(471{,}9 - 494)}{140{,}4} = -0{,}472$$

Izračunana koeficienta sta negativna, kar potrjuje našo domnevo: opazovana porazdelitev je nekoliko asimetrična v levo. □

14.3 MERE SPLOŠČENOSTI

Frekvenčne porazdelitve se razlikujejo po sploščenosti. Pri ***koničastih porazdelitvah*** frekvence osrednjih razredov močno odstopajo od frekvenc robnih razredov, osrednji razredi so bistveno močnejši od robnih. Pri ***sploščenih porazdelitvah*** so frekvence robnih razredov primerljive s frekvencami osrednjih.

Koeficient sploščenosti je definiran kot razmerje med kvartilnim in decilnim razmikom, pomnoženo s faktorjem 1,9.

$$KS = 1{,}9 \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1}$$

Z njim merimo sploščenost porazdelitve statistične spremenljivke. Če je

- $KS > 1$, je porazdelitev ***sploščena***,
- $KS < 1$, je porazdelitev ***koničasta***.

Pri Gaussovi normalni porazdelitvi (obravnavali jo bomo v nadaljevanju) je $KS = 1$.

Primer
Analizirajmo uspeh skupine 16 študentov pri pisnem izpitu. Dosegli so lahko največ 60 točk, njihove rezultate pa prikazuje spodnja ranžirna vrsta.

y	22	25	32	35	36	37	40	42	43	44	46	47	50	52	56	58
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Bralec lahko sam izračuna kvantile, ki jih potrebujemo za analizo sploščenosti: $Q_1 = 35{,}5$ točk, $Q_3 = 48{,}5$ točk, $D_1 = 25{,}7$ točk in $D_9 = 55{,}6$ točk. Izračunajmo koeficient sploščenosti.

$$KS = 1{,}9 \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} = 1{,}9 \cdot \frac{48{,}5 - 35{,}5}{55{,}6 - 25{,}7} = 0{,}826$$

Ker je izračunani koeficient $KS < 1$, je porazdelitev koničasta. Število študentov s povprečnim rezultatom je bistveno večje od števila študentov, katerih rezultati se močno odklanjajo od povprečja. □

Primer
Primerjalno analizirajmo še uspeh enako močne skupine 16 študentov pri istem pisnem izpitu kot v zgornjem primeru. V spodnji ranžirni vrsti vidimo, da se je ta skupina pri tem izpitu bistveno drugače odrezala kot njihovi kolegi iz prve skupine.

y	8	16	18	25	28	30	32	40	42	48	50	51	52	55	56	59
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

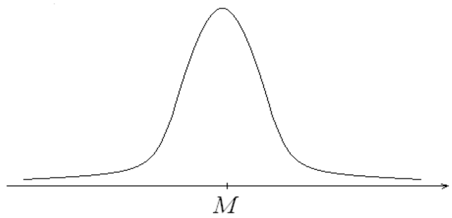
Bralec lahko spet sam preveri izračunane kvantile: $Q_1 = 26{,}5$ točk, $Q_3 = 51{,}5$ točk, $D_1 = 16{,}2$ točk in $D_9 = 55{,}9$ točk. Izračunajmo koeficient sploščenosti.

$$KS = 1{,}9 \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} = 1{,}9 \cdot \frac{51{,}5 - 26{,}5}{55{,}9 - 16{,}2} = 1{,}196$$

Ker je izračunani koeficient $KS > 1$, je porazdelitev sploščena. Število študentov, pri katerih se doseženi rezultati močno odklanjajo od povprečja, je primerljivo s številom študentov s povprečnimi rezultati. □

14.4 GAUSSOVA NORMALNA PORAZDELITEV

Za konec poglavja omenimo še znamenito ***normalno*** ali ***Gaussovo porazdelitev***. Ime je dobila po nemškem matematiku, astronomu in fiziku C. F. Gaussu (1777–1855). Gre za teoretično porazdelitev, ki pa se zelo dobro prilega številnim stvarnim porazdelitvam. Prikazuje jo krivulja, imenovana ***Gaussova krivulja*** ali tudi – zaradi svoje značilne oblike – ***zvonasta krivulja***.



Slika 15: Gaussova normalna porazdelitev

Aritmetična sredina *M*, mediana *Me* in modus *Mo* te porazdelitve sovpadajo

$$M = Me = Mo,$$

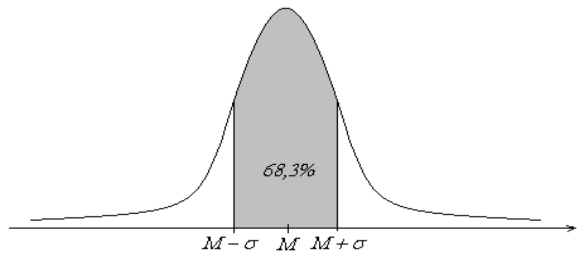
porazdelitev je simetrična. Zato sta koeficienta asimetrije glede na modus in glede na mediano enaka 0:

$$KA_{Mo} = KA_{Me} = 0.$$

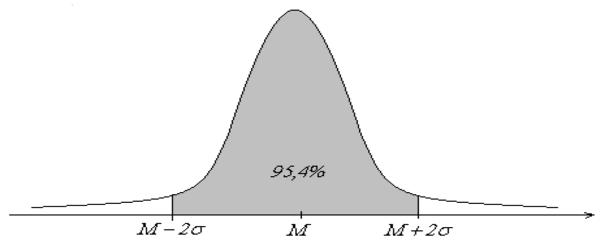
Porazdelitev ni niti koničasta niti sploščena, njen koeficient sploščenosti je

$$KS = 1.$$

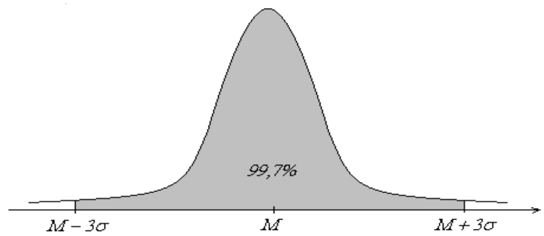
Interval $(M - \sigma, M + \sigma)$ vsebuje 68,3 % vseh vrednosti spremenljivke, kar pomeni, da se 68,3 % vseh vrednosti razlikuje od aritmetične sredine za manj kot en standardni odklon. Interval $(M - 2\sigma, M + 2\sigma)$ vsebuje že 95,4 % vseh vrednosti, interval $(M - 3\sigma, M + 3\sigma)$ pa kar 99,7 % vseh vrednosti. Le 0,3 % vseh vrednosti se torej od aritmetične sredine odkloni za več kot 3σ (glej spodnje slike).



Slika 16: Gaussova normalna porazdelitev, delež tistih vrednosti statistične spremenljivke, ki se od aritmetične sredine *M* odklonijo za manj kot σ



Slika 17: Gaussova normalna porazdelitev, delež tistih vrednosti statistične spremenljivke, ki se od aritmetične sredine *M* odklonijo za manj kot 2σ



Slika 18: Gaussova normalna porazdelitev, delež tistih vrednosti statistične spremenljivke, ki se od aritmetične sredine *M* odklonijo za manj kot 3σ

Primer

Spodnja tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev 50 trgovin po površini prodajnega prostora (prirejeni podatki). Raziščimo to porazdelitev in poskušajmo ugotoviti, v kolikšni meri se približa normalni porazdelitvi. Dodajmo tabeli še stolpce, ki jih potrebujemo za nadaljnje izračune.

Tabela 59: Frekvenčna porazdelitev trgovin po površini prodajnega prostora

Površina prodajnega prostora v m^2	y_j	f_j	F_j	$f_j y_j$	$f_j y_j^2$
nad 40 do 80	60	10	10	600	36.000
nad 80 do 120	100	12	22	1.200	120.000
nad 120 do 160	140	16	38	2.240	313.600
nad 160 do 200	180	6	44	1.080	194.400
nad 200 do 240	220	6	50	1.320	290.400
Σ	-	50	-	6.440	954.400

Izračunajmo aritmetično sredino porazdelitve.

$$M^* = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{r} f_j y_j = \frac{1}{50}\cdot 6.440 = 128{,}8\,\mathrm{m}^2$$

Izračunajmo standardni odklon. Upoštevajmo Sheppardov popravek.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{r} f_j y_j^{\,2} - M^2 = \frac{1}{50}\cdot 954.400 - 128{,}8^2 = 2.498{,}56$$

$$\sigma_{cor}^{\,2} = \sigma^2 - \frac{d^2}{12} = 2.498{,}56 - \frac{40^2}{12} \approx 2.365{,}227$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{cor}^{\,2}} = \sqrt{2.365{,}22} \approx 48{,}634$$

Ocenili bomo, kolikšen delež populacije sodi v interval $(M-\sigma, M+\sigma)$. Izračunajmo spodnjo in zgornjo mejo intervala, ustrezna ranga in pripadajoča kvantilna ranga.

$$M - \sigma = 128{,}8 - 48{,}634 = 80{,}166$$
$$M + \sigma = 128{,}8 + 48{,}634 = 177{,}434$$

Spodnja meja sodi v 2. razred porazdelitve, zato sta pripadajoči rang in kvantilni rang

$$R_0 = F_{j-1} + f_j \cdot \frac{y - y_{j,\min}}{d_j} = 10 + 12\cdot\frac{80{,}166-80}{40} \approx 10{,}0500$$

$$P_0 = \frac{R_0 - 0{,}5}{N} = \frac{10{,}0500 - 0{,}5}{50} = 0{,}191 = 19{,}1\,\%$$

Zgornja meja sodi v 4. razred, zato je

$$R_1 = 38 + 6\cdot\frac{177{,}434-160}{40} \approx 40{,}6151$$

$$P_1 = \frac{R_1 - 0{,}5}{N} = \frac{40{,}6151 - 0{,}5}{50} \approx 0{,}8023 = 80{,}23\,\%$$

Delež populacije, ki pripada intervalu $(M-\sigma, M+\sigma)$, je tedaj enak

$$P_1 - P_0 = 0{,}8023 - 0{,}191 = 0{,}6113 = 61{,}13\,\%.$$

Pri Gaussovi normalni porazdelitvi se 68,3 % vseh vrednosti spremenljivke razlikuje od aritmetične sredine za manj kot en standardni odklon, pri dani porazdelitvi pa je takih vrednosti le 61,13 %. Sklepamo, da se porazdelitev 50 trgovin glede na površino prodajnega prostora bistveno razlikuje od normalne porazdelitve.

Dana porazdelitev in normalna porazdelitev se razlikujeta še v enem elementu. Že bežen pogled na stolpec absolutnih frekvenc nam razkrije poudarjeno asimetrijo porazdelitve trgovin. Število trgovin z majhno površino prodajnega prostora (1. in 2. razred) je bistveno večje od števila trgovin z večjo površino prodajnega prostora (4. in 5. razred). Normalna porazdelitev pa je, kot vemo, simetrična. □

Če bi, nasprotno, v zgornjem primeru ugotovili ujemanje dane in normalne porazdelitve, bi morali raziskovanje seveda nadaljevati. Izračunali bi, kolikšen delež populacije vsebujeta intervala $(M - 2\sigma, M + 2\sigma)$ in $(M - 3\sigma, M + 3\sigma)$, kolikšna je stopnja asimetrije in stopnja sploščenosti dane porazdelitve ter rezultate primerjali z ustreznimi lastnostmi normalne porazdelitve.

Sklep

Z merami variabilnosti smo ovrednotili stopnjo razpršenosti statistične spremenljivke okrog njenih srednjih vrednosti. Ovrednotili smo stopnjo njene asimetrije in sploščenosti in v sklepnem delu obravnavali znamenito Gaussovo normalno porazdelitev.

***

NALOGE

14.1. Tabela prikazuje ocene 180 študentov pri pisnem izpitu (prirejeni podatki).

Tabela 60: Dosežene ocene študentov pri pisnem izpitu

Ocena y_j	Št. študentov f_j			
5	2			
6	24			
7	60			
8	64			
9	24			
10	6			
Skupaj	180			

a) Izračunajte oceno za aritmetično sredino (glej nalogo 13.2.).
b) Izračunajte standardni odklon in koeficient variabilnosti.

14.2. Tabela prikazuje grupirane podatke o neto mesečnih plačah zaposlenih v podjetju U4U (prirejeni podatki).

Tabela 61: Neto mesečne plače zaposlenih v podjetju U4U

Neto plača v EUR	y_j	f_j			
nad 400 do 600		45			
nad 600 do 800		355			
nad 800 do 1.000		290			
nad 1.000 do 1.200		90			
nad 1.200 do 1.400		12			
nad 1.400 do 1.600		4			
nad 1.600 do 1.800		3			
nad 1.800 do 2.000		1			
Skupaj		800			

a) Izračunajte oceno za aritmetično sredino (glej nalogo 13.3.).
b) Izračunajte standardni odklon in koeficient variabilnosti.

14.3. Pri statistični raziskavi so proučevali število otrok v družini. Ugotovili so, da je med 200 družinami 10 družin brez otrok, v 90 družinah imajo po enega otroka, v 74 družinah po dva, v 20 družinah po tri, v 4 družinah po štiri, 2 družini pa imata kar po 5 otrok.

a) Izračunajte kumulativo absolutnih frekvenc.
b) Izračunajte oceno za aritmetično sredino in standardni odklon.
c) Izračunajte oceni za mediano in za modus.

15 ANALIZA ČASOVNIH VRST

V naravoslovnih in družboslovnih znanostih opazujemo številne pojave in sledimo njihovemu časovnemu razvoju v daljšem obdobju. Z zbiranjem takih podatkov dobimo časovne vrste, ki prikazujejo dinamiko opazovanega pojava, z raziskovanjem te dinamike pa skušamo ugotoviti zakonitosti, ki usmerjajo razvoj pojava in, kar je najpomembnejše, skušamo napovedati razvoj pojava v prihodnosti. Kako izpeljati analizo take časovne vrste? Kako napovedati njen bodoči razvoj? Na ta vprašanja odgovorimo v tem poglavju.

Za enostavno analizo časovnih vrst smo v predhodnih poglavjih že zbrali nekaj orodij: koeficienti rasti, indeksi s stalno osnovo, verižni indeksi, stopnje rasti, povprečni koeficienti rasti, povprečne stopnje rasti idr. Bolj poglobljena analiza nas pripelje do ***trenda***, ki kaže na osnovno smer razvoja pojava. Ugotovimo ga z opazovanjem časovne v vrste v daljšem časovnem obdobju.

Naj bodo $Y_1, Y_2, \ldots Y_N$ vrednosti v časovni vrsti, zbrane v časovnih trenutkih (ali obdobjih) $1,2,\ldots N$. ***Trend*** je tako izbrana matematična funkcija časa *t* (funkcija, odvisna od spremenljivke *t*), da se njene vrednosti $T_1, T_2, \ldots T_N$ v časovnih trenutkih $t = 1,2,\ldots N$ po določenem izbranem kriteriju kar najtesneje prilegajo vrednostim časovne vrste $Y_1, Y_2, \ldots Y_N$.

Pri iskanju trenda je pomemben že prvi korak: izbor tipa funkcije oziroma družine funkcij, med katerimi bomo iskali tisto, ki se najtesneje prilega podatkom. Kriterij prileganja časovni vrsti, ki ga najpogosteje srečamo v praksi, je ***metoda najmanjših kvadratov.*** Iskana funkcija trenda je tista funkcija izbrane družine, pri kateri je vsota kvadratov odklonov vrednosti trenda od vrednosti časovne vrste najmanjša.

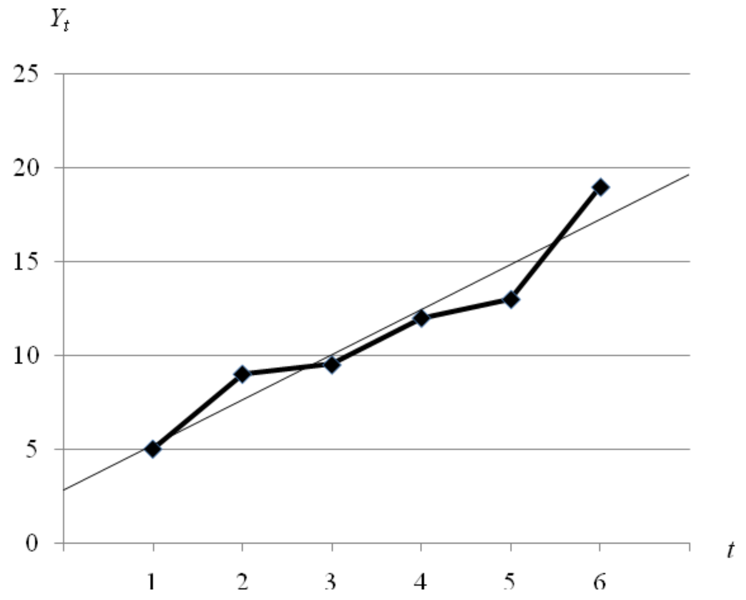
$$\sum_{t=1}^{N} (Y_t - T_t)^2 = \text{minimalna}$$

15.1 LINEARNI TREND

Funkcijo trenda iščemo med linearnimi funkcijami

$$T_t = a + bt,$$

pri čemer sta *a* in *b* konstanti. Konstanti *b* pravimo ***smerni koeficient***. Graf linearne funkcije je premica. Iščemo torej premico, ki se na grafu časovne vrste po metodi najmanjših kvadratov najtesneje prilega točkam, ki predstavljajo vrednosti časovne vrste.



Slika 19: Linearni trend

Lomljena črta na zgornji sliki povezuje točke, ki predstavljajo vrednosti časovne vrste, narisana premica pa je graf funkcije linearnega trenda..

Z metodo najmanjših kvadratov dobimo ***sistem normalnih enačb*** za koeficienta a in b:

$$\sum_{t=1}^{N} Y_t = aN + b\sum_{t=1}^{N} t$$

$$\sum_{t=1}^{N} tY_t = a\sum_{t=1}^{N} t + b\sum_{t=1}^{N} t^2$$

Splošna ***rešitev normalnega sistema*** enačb je

$$b = \frac{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} tY_t - \bar{t}\,\bar{Y}}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2 - \bar{t}^{\,2}}, \qquad a = \bar{Y} - b\bar{t}\,,$$

pri čemer je $\bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t$ in $\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} Y_t$.

Za računanje s svinčnikom in papirjem je morda priročnejša poenostavitev normalnega sistema. Dosežemo jo s premikom izhodišča časa $(t = 0)$ na sredino časovne vrste. Čas tako zdaj teče v obe smeri: desno od 0 po pozitivnih številih in levo po negativnih.

Pri lihem številu N zavzame čas t celoštevilske vrednosti.

$$t = -\tfrac{N-1}{2}, -\tfrac{N-3}{2}, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tfrac{N-3}{2}, \tfrac{N-1}{2}$$

Srednji člen časovne vrste je zdaj preimenovan v Y_0, členi za njim v $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, tisti pred njim pa v $Y_{-1}, Y_{-2}, Y_{-3}, \ldots$.

Pri sodem številu *N* se znajde čas $t = 0$ med dvema sosednjima členoma vrste. Tako definiran čas zavzame vrednosti

$$t = -\tfrac{N-1}{2}, -\tfrac{N-3}{2}, \ldots, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, \ldots, \tfrac{N-3}{2}, \tfrac{N-1}{2}.$$

Osrednja člena časovne vrste preimenujemo zdaj v $Y_{-0,5}$ in $Y_{0,5}$. Sledijo jima členi $Y_{1,5}, Y_{2,5}, \ldots$, pred njima pa so členi $Y_{-1,5}, Y_{-2,5}, \ldots$.

S tem premikom izhodišča časa dosežemo, da je $\sum_t t = 0$ (znak $\sum_t$ pomeni seštevanje po vseh vrednostih časa *t*, ki nastopajo v vrsti). Zato dobi normalni sistem poenostavljeno obliko

$$\sum_t Y_t = aN$$

$$\sum_t tY_t = b\sum_t t^2$$

Iskana koeficienta lahko zdaj izračunamo s preprostima obrazcema

$$a = \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_t Y_t, \qquad b = \frac{\sum_t tY_t}{\sum_t t^2}.$$

Primer
Tabela prikazuje gibanje povprečne drobnoprodajne cene neosvinčenega 95-oktanskega bencina v obdobju 2003–2009. Cene so pretvorjene v evre po centralnem paritetnem tečaju. Hitro opazimo stalno rast povprečne cene z majhnim padcem v letu 2009, zato poskušamo to dinamiko opisati z linearnim trendom.

Tabela 62: Povprečne drobnoprodajne cene neosvinčenega 95-oktanskega bencina

Leto	Povprečna cena litra neosvinčenega 95-oktanskega bencina (v EUR)
2003	0,772
2004	0,831
2005	0,917
2006	1,002
2007	1,030
2008	1,070
2009	1,048

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2007, 2008 in 2009

Izhodišče časa $t = 0$ postavimo na sredino časovne vrste, torej v leto 2006. Dodajmo tabeli še nekaj stolpcev, ki nam bodo v pomoč.

Tabela 63: Povprečne drobnoprodajne cene neosvinčenega 95-oktanskega bencina

Leto	Povprečna cena litra neosvinčenega 95-oktanskega bencina (v EUR)	t	t^2	tY_t	T_t
2003	0,772	-3	9	-2,316	0,801
2004	0,831	-2	4	-1,662	0,852
2005	0,917	-1	1	-0,917	0,902
2006	1,002	0	0	0	0,953
2007	1,030	1	1	1,030	1,004
2008	1,070	2	4	2,140	1,054
2009	1,048	3	9	3,144	1,105
Σ	6,670	0	28	1,419	-

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2007 in 2008

Izračunajmo koeficienta linearnega trenda.

$$a = \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_t Y_t = \frac{1}{7}\cdot 6{,}670 = 0{,}9529$$

$$b = \frac{\sum_t tY_t}{\sum_t t^2} = \frac{1{,}419}{28} = 0{,}0507$$

Enačba iskanega linearnega trenda je torej

$$T_t = 0{,}9529 + 0{,}0507\ t.$$

Izračunajmo vrednosti trenda v opazovanem obdobju (izračunane vrednosti zaokrožimo na tri decimalke).

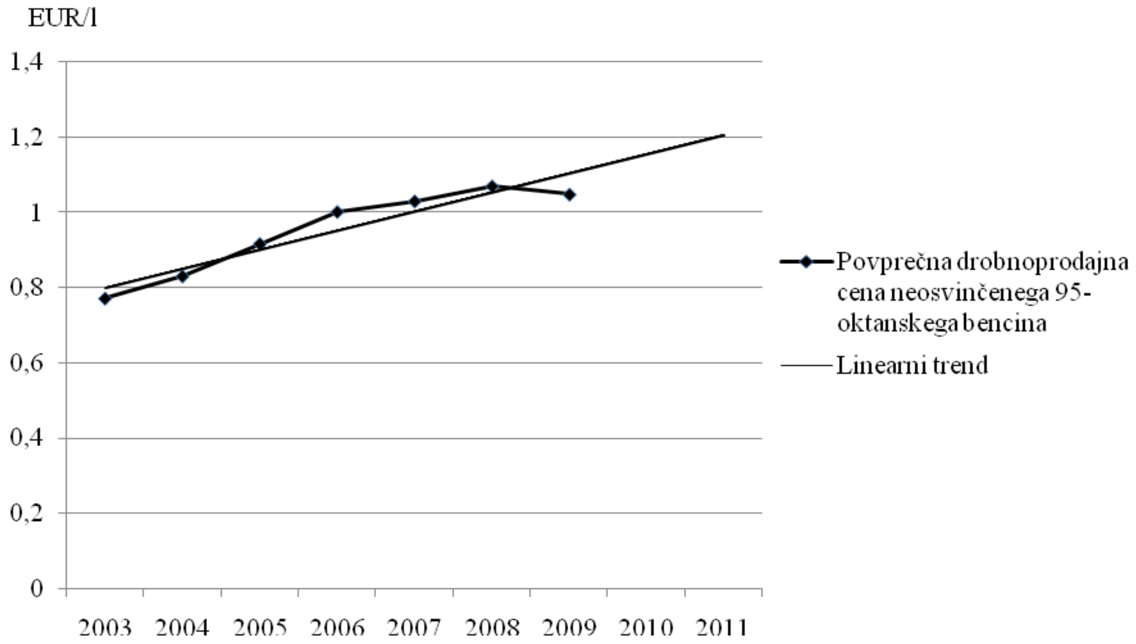
$$\begin{aligned}
T_{-3} &= 0{,}9529 + 0{,}0507(-3) \approx 0{,}801\\
T_{-2} &= 0{,}9529 + 0{,}0507\,(-2) \approx 0{,}852\\
T_{-1} &= 0{,}9529 + 0{,}0507\,(-1) \approx 0{,}902\\
T_0 &= 0{,}9529 + 0{,}0507\cdot 0 \approx 0{,}953\\
T_1 &= 0{,}9529 + 0{,}0507\cdot 1 \approx 1{,}004\\
T_2 &= 0{,}9529 + 0{,}0507\cdot 2 \approx 1{,}054\\
T_3 &= 0{,}9529 + 0{,}0507\cdot 3 \approx 1{,}105
\end{aligned}$$

Izračunane vrednosti vnesimo v tabelo in primerjajmo z realnimi podatki. Opazimo dobro ujemanje, zato smemo sklepati, da je bila uporaba linearnega trenda smiselna. Napovejmo še povprečno drobroprodajno ceno tega bencina v letu 2011. Po našem štetju časa je v tem letu $t = 5$. Izračunajmo pripadajočo vrednost trenda.

$$T_5 = 0{,}9529 + 0{,}0507 \cdot 5 \approx 1{,}206$$

Če se bi do konca leta 2011 ohranila dinamika rasti iz opazovanega obdobja, lahko napovemo, da bo povprečna drobnoprodajna cena neosvinčenega 95-oktanskega bencina 1,206 EUR za liter.

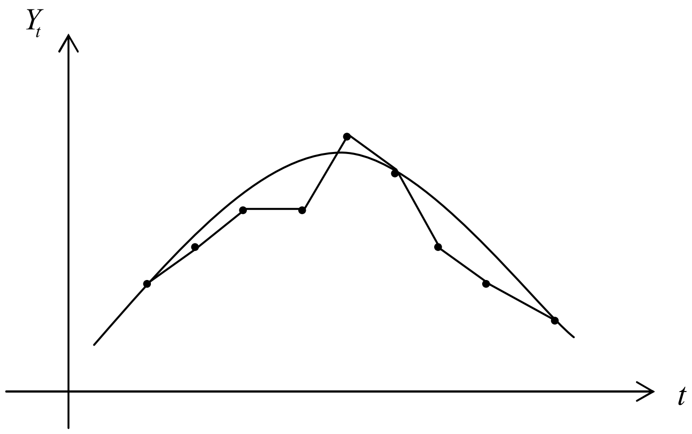
Dano časovno vrsto in linearni trend prikažimo še grafično.



Slika 20: Časovna vrsta in linearni trend

15.2 PARABOLIČNI TREND

Nekatere časovne vrste vsebujejo dve sestavini: obdobje naraščanja in obdobje padanja. Dinamiko take časovne vrste lahko ilustriramo s krivuljo. Lomljena črta na spodnji sliki povezuje točke, ki predstavljajo vrednosti časovne vrste, narisana krivulja pa se po metodi najmanjših kvadratov tem točkam najtesneje prilega.



Slika 21: Parabolični trend

Primer
Na tržišču se pojavi privlačen izdelek. Povpraševanje po tem izdelku hitro narašča do trenutka, ko se trg zasiči s tem izdelkom. Zasičenju sledi seveda upadanje povpraševanja. □

Najpreprostejša krivulja prikazane oblike je kvadratna parabola. Funkcijo trenda torej iščemo med kvadratnimi funkcijami.

$$T_t = a + bt + ct^2$$

Z metodo najmanjših kvadratov pridemo do normalnega sistema enačb:

$$\begin{aligned}
aN + b\sum_{t=1}^{N} t + c\sum_{t=1}^{N} t^2 &= \sum_{t=1}^{N} Y_t \\
a\sum_{t=1}^{N} t + b\sum_{t=1}^{N} t^2 + c\sum_{t=1}^{N} t^3 &= \sum_{t=1}^{N} tY_t \\
a\sum_{t=1}^{N} t^2 + b\sum_{t=1}^{N} t^3 + c\sum_{t=1}^{N} t^4 &= \sum_{t=1}^{N} t^2 Y_t
\end{aligned}$$

Pred nami je sistem treh enačb s tremi neznankami. Tako kot pri iskanju linearnega trenda lahko tudi ta sistem poenostavimo s premikom izhodišča časa na sredino časovne vrste.

Pri lihem številu N zavzame čas t celoštevilske vrednosti

$$t = -\tfrac{N-1}{2}, -\tfrac{N-3}{2}, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tfrac{N-3}{2}, \tfrac{N-1}{2},$$

členi časovne vrste pa se preimenujejo v $\ldots, Y_{-3}, Y_{-2}, Y_{-3}, Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$

Pri sodem številu N zavzame čas t vrednosti

$$t = -\tfrac{N-1}{2}, -\tfrac{N-3}{2}, \ldots, -1.5,\ -0.5,\ 0.5,\ 1.5, \ldots \tfrac{N-3}{2}, \tfrac{N-1}{2},$$

členi časovne vrste pa se preimenujejo v $\ldots, Y_{-2.5}, Y_{-1.5}, Y_{-0.5}, Y_{0.5}, Y_{1.5}, Y_{.2.5}, \ldots.$

Pri tako definirani časovni vrsti je $\sum_t t = 0$ in $\sum_t t^3 = 0$. Normalni sistem enačb dobi zdaj preprostejšo obliko.

$$aN + c\sum_{t=1}^{N} t^2 = \sum_{t=1}^{N} Y_t$$

$$b\sum_{t=1}^{N} t^2 = \sum_{t=1}^{N} tY_t$$

$$a\sum_{t=1}^{N} t^2 + c\sum_{t=1}^{N} t^4 = \sum_{t=1}^{N} t^2 Y_t$$

Iskane koeficiente izračunamo z obrazci.

$$c = \frac{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2 Y_t - \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2 \cdot \overline{Y}}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^4 - \left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{t=1}^{N} tY_t}{\sum_{t=1}^{N} t^2} \qquad a = \overline{Y} - c \cdot \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2$$

Primer

Opazujmo vpis študentov v visoko šolo EU4U v obdobju 2005–2009 (prirejeni podatki). Podatki o številu vpisanih študentov so zbrani v spodnji tabeli.

Tabela 64: Vpisani študenti v visoko šolo EU4U

Leto vpisa	Število vpisanih študentov
2005	153
2006	181
2007	198
2008	210
2009	192

Že z bežnim pogledom opazimo naraščanje vpisa v prvem delu opazovanega obdobja, vrh v letu 2008 in precejšen padec v zadnjem letu tega obdobja (morda gre za učinek recesije). Poskusimo se približati dinamiki vpisa s paraboličnim trendom. Zberimo vse potrebne podatke v tabeli. Izhodišče za merjenje časa ($t = 0$) postavimo na sredino časovne vrste, torej v leto 2007, število obdobij pa je $N = 5$.

Tabela 65: Vpisani študenti v visoko šolo EU4U

Leto	Y_t	t	t^2	t^4	tY_t	$t^2 Y_t$	T_t
2005	153	-2	4	16	-306	612	152
2006	181	-1	1	1	-181	181	183
2007	198	0	0	0	0	0	201
2008	210	1	1	1	210	210	204
2009	192	2	4	16	384	768	194
Σ	934	0	10	34	107	1.771	934

Izračunajmo aritmetično sredino števila vpisanih študentov

$$\overline{Y} = \frac{1}{5}\sum_t Y_t = \frac{1}{5}\cdot 934 = 186{,}8$$

in koeficiente iskane kvadratne funkcije:

$$c = \frac{\frac{1}{5}\cdot 1.771 - \frac{1}{5}\cdot 10\cdot 186{,}8}{\frac{1}{5}\cdot 34 - \left(\frac{1}{5}\cdot 10\right)^2} \approx -6{,}93$$

$$b = \frac{107}{10} = 10{,}7$$

$$a = 186{,}8 - (-6{,}93)\cdot \tfrac{1}{5}\cdot 10 = 200{,}66.$$

Enačba iskanega paraboličnega trenda je torej

$$T_t = 200{,}66 + 10{,}7\,t - 6{,}93\,t^2.$$

Z zaporednim vstavljanjem vrednosti časovne spremenljivke $t = -2, -1, 0, 1, 2$ v zgornjo enačbo dobimo vrednosti paraboličnega trenda T_t v opazovanem obdobju, tj. zadnji stolpec zgornje tabele. Npr.:

$$T_{-2} = 200{,}66 + 10{,}7\cdot(-2) - 6{,}93\cdot(-2)^2 = 151{,}54 \approx 152$$
$$T_{-1} = 200{,}66 + 10{,}7\cdot(-1) - 6{,}93\cdot(-1)^2 = 183{,}03 \approx 183$$
$$\ldots\ \ldots$$

Hitro opazimo, da se izračunane vrednosti trenda dobro ujemajo z dejanskimi vrednostmi. Sklepamo lahko, da je bila uporaba paraboličnega trenda v tem primeru smiselna.

Tvegajmo še napoved števila vpisanih študentov v letu 2010, ob predpostavki, da bo dinamika vpisa tudi v tem letu sledila paraboličnemu trendu. Letu 2010 pripada vrednost časovne spremenljivke $t = 3$, zato je

$$T_3 = 200{,}66 + 10{,}7\cdot 3 - 6{,}93\cdot 3^2 = 170{,}39.$$

Napovedujemo, da se bo v letu 2010 v visoko šolo EU4U vpisalo 170 študentov. □

15.3 SEZONSKI INDEKSI

Številni pojavi v ekonomiji imajo izrazit sezonski značaj. Tako se prodaja športnih rekvizitov za zimske športe poveča v zimskih mesecih, prodaja osvežilnih pijač pa v poletnih. Poraba električne energije npr. pa kaže izrazita ponavljajoča se nihanja v okviru dneva. Ta periodična nihanja bomo poskušali opisati s sezonskimi indeksi.

Časovno obdobje, po katerem se vzorec nihanja nekega pojava znova obnovi, je ***perioda*** (običajno 1 leto). Znotraj periode pa opazimo bolj ali manj izrazita nihanja med različnimi obdobji (običajno gre za četrtletja, mesece ali tudi krajša obdobja).

Naj bo N število period, čas t torej zavzame vrednosti $t = 1,2,3,\dots N$. Vsaka perioda naj vsebuje P obdobij. Črka p bo oznaka za obdobje znotraj periode, zato je $p = 1,2,3,\dots,P$. Oznaka Y_{tp} pomeni vrednost opazovane spremenljivke v obdobju p znotraj periode t.

Primer
Časovno vrsto opazujemo 8 let po četrtletjih. Tedaj je $t = 1,2,3,\dots 8$ in $p = 1,2,3,4$. Oznaka Y_{53} tedaj pomeni vrednost opazovane spremenljivke v tretjem četrtletju petega leta. □

Z zbranimi podatki o časovni vrsti izračunamo vsote po periodah – seštejemo vse podatke, ki se nanašajo na isto obdobje p.

$$S_p = \sum_{t=1}^{N} Y_{tp}$$

Nato izračunamo aritmetično sredino teh vsot (povprečje).

$$\overline{S} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} S_p$$

Periodični indeks za obdobje p je s faktorjem 100 pomnoženo razmerje med vsoto S_p, ki pripada temu obdobju, in povprečjem teh vsot.

$$I_p = \frac{S_p}{\overline{S}} \cdot 100$$

Periodični indeks $I_p > 100$ pomeni, da vrednosti opazovane spremenljivke v tem obdobju odstopajo od povprečja navzgor, periodični indeks $I_p < 100$ pa, da vrednosti opazovane spremenljivke v tem obdobju odstopajo od povprečja navzdol. Periodični indeks $I_p = 100$ kaže, da sezonski vplivi niso relevantni. Vsota periodičnih indeksov po vseh obdobjih je enaka stokratniku števila obdobij znotraj periode.

$$\sum_{p=1}^{P} I_p = 100 \cdot P$$

Primer
V spodnji tabeli je zbranih nekaj podatkov o žičniškem prometu v Sloveniji – natančneje o številu prepeljanih potnikov z nihalkami po četrtletjih v obdobju 2006–2008.

Tabela 66: Število prepeljanih potnikov z nihalkami po četrtletjih (števila potnikov so v 1000)

Leto \ Četrtletje	I	II	III	IV
2006	238	61	111	31
2007	211	82	180	47
2008	278	47	151	104

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2006, 2007 in 2008

Izračunajmo periodične indekse za četrtletja. Seštejmo podatke za četrtletja.

$$S_1 = 238 + 211 + 278 = 727$$
$$S_2 = 61 + 82 + 47 = 190$$
$$S_3 = 111 + 180 + 151 = 442$$
$$S_4 = 31 + 47 + 104 = 182$$

Izračunajmo njihovo povprečje.

$$\overline{S} = \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} S_p = \frac{1}{4}\cdot(727 + 190 + 442 + 182) = 385{,}25$$

Izračunajmo še periodične indekse.

$$I_1 = \frac{S_1}{\overline{S}}\cdot 100 = \frac{727}{385{,}25}\cdot 100 = 188{,}7$$
$$I_2 = \frac{S_2}{\overline{S}}\cdot 100 = \frac{190}{385{,}25}\cdot 100 = 49{,}3$$
$$I_3 = \frac{S_3}{\overline{S}}\cdot 100 = \frac{442}{385{,}25}\cdot 100 = 114{,}7$$
$$I_4 = \frac{S_4}{\overline{S}}\cdot 100 = \frac{182}{385{,}25}\cdot 100 = 47{,}2$$

Zapišimo pridobljene rezultate v tabelo.

Tabela 67: Število prepeljanih potnikov z nihalkami po četrtletjih (števila potnikov so v 1000)

Leto \ Četrtletje	I	II	III	IV
2006	238	61	111	31
2007	211	82	180	47
2008	278	47	151	104
S_p	727	190	442	182
I_p	188,7	49,3	114,7	47,2

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2006, 2007 in 2008

Kot vidimo, ima število prepeljanih potnikov z nihalkami izrazit sezonski značaj. V zimskem četrtletju je kar za 88,7 % nad povprečjem, v poletnem četrtletju za 14,7 % nad povprečjem. V drugem in četrtem četrtletju pa ne doseže niti polovice povprečja. Vsota vseh štirih periodičnih indeksov bi morala biti enaka $\sum_{p=1}^{4} I_p = 100 \cdot 4 = 400$. Zaradi zaokroževanja je vsota zapisanih indeksov le 399,9.

Z izračunanimi periodičnimi indeksi napovejmo, kolikšno število potnikov bodo po četrtletjih prepeljali z nihalkami v letu 2010. Predpostavimo, da bo skupno število prepeljanih potnikov 840.000 in da se bo tudi v tem letu ohranila sezonska dinamika iz opazovanega obdobja. Izračunajmo najprej povprečno četrtletno število prepeljanih potnikov.

$$\overline{S} = \frac{1}{4} \cdot 840.000 = 210.000$$

S periodičnimi indeksi lahko zdaj napovemo število prevozov po četrtletjih.

$$\text{1. četrtletje: } 210.000 \cdot \frac{188,7}{100} = 396.270$$
$$\text{2. četrtletje: } 210.000 \cdot \frac{49,3}{100} = 103.530$$
$$\text{3. četrtletje: } 210.000 \cdot \frac{114,7}{100} = 240.870$$
$$\text{4. četrtletje: } 210.000 \cdot \frac{47,2}{100} = 99.120$$

□

Sklep
Časovno vrsto smo analizirali z dvema matematičnima modeloma: z linearnim trendom in s paraboličnim trendom. Kratkoročne napovedi razvoja časovne vrste na podlagi teh modelov so precej zanesljive, dolgoročne napovedi pa seveda precej tvegane. V sklepnem delu smo v analizo vključili še sezonske vplive na razvoj časovne vrste.

***

NALOGE

15.1. Tabela prikazuje število prenočitev turistov v Sloveniji v obdobju 2002–2006.
   a) Izračunajte linearni trend.
   b) Zapišite vrednosti linearnega trenda v opazovanem obdobju.

c) Napovejte število prenočitev v letu 2010 in v letu 2012 z linearnim trendom.
d) Napovejte število prenočitev v letu 2010 in v letu 2012 s povprečnim koeficientom rasti.

Tabela 68: Število prenočitev turistov v Sloveniji

Leto	Število prenočitev v 1.000				
2002	7.321				
2003	7.503				
2004	7.589				
2005	7.572				
2006	7.722				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

15.2. Tabeli prikazujeta strukturo prebivalstva Slovenije po aktivnosti v 2. četrtletju vsakega leta.

a) Izračunajte linearni trend za število delovno aktivnega prebivalstva in vrednosti trenda v opazovanem obdobju.
b) Napovejte število delovno aktivnega prebivalstva v letu 2011 z linearnim trendom in s povprečnim koeficientom rasti .
c) Izračunajte linearni trend za število brezposelnih oseb in vrednosti trenda v opazovanem obdobju.
d) Napovejte število brezposelnih oseb v letu 2011 z linearnim trendom in s povprečnim koeficientom rasti.

Tabela 69: Delovno aktivno prebivalstvo v 2. četrtletju navedenih let

Leto	Delovno aktivno prebivalstvo v 1.000				
2003	896				
2004	946				
2005	947				
2006	969				
2007	994				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 70: Brezposelne osebe v 2. četrtletju navedenih let

Leto	Brezposelne osebe v 1.000				
2003	63				
2004	61				
2005	58				
2006	61				
2007	48				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

15.3. Tabela prikazuje povprečne mesečne neto plače na zaposleno osebo pri pravnih osebah v obdobju 2001–2007.

a) Izračunajte linearni trend povprečne mesečne neto plače na zaposleno osebo. Izračunajte vrednosti trenda v opazovanem obdobju.
b) Z linearnim trendom napovejte povprečno neto plačo na zaposleno osebo v letu 2012.
c) Napovejte povprečno neto plačo na zaposleno osebo v letu 2012 s povprečnim koeficientom rasti iz obdobja 2001–2007.
d) Napovejte povprečno neto plačo na zaposleno osebo v letu 2012 s povprečnim koeficientom rasti iz obdobja 2004–2007.

Tabela 71: Povprečne mesečne plače na zaposleno osebo pri pravnih osebah

Leto	Neto v EUR				
2001	562,74				
2002	617,37				
2003	663,80				
2004	701,90				
2005	735,73				
2006	773,42				
2007	834,50				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

15.4. Tabela prikazuje število sklenjenih zakonskih zvez v obdobju 2000–2004.

a) Izračunajte linearni trend števila sklenjenih zakonskih zvez.
b) Napovejte število sklenjenih zakonskih zvez v letu 2010 z linearnim trendom. Primerjajte rezultat z napovedjo iz naloge 12.11.

Tabela 72: Število sklenjenih zakonskih zvez

Leto	Št. sklenjenih zakonskih zvez				
2000	7.201				
2001	6.935				
2002	7.064				
2003	6.756				
2004	6.558				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2005

15.5. Tabela prikazuje podatke o številu aktivnega prebivalstva v Sloveniji v 2. četrtletju navedenih let. Izračunajte linearni trend števila aktivnega prebivalstva in zapišite vrednosti trenda v opazovanem obdobju.

Tabela 73: Število aktivnega prebivalstva v Sloveniji v 2. četrtletju navedenih let

Leto	Aktivno prebivalstvo v 1.000				
1999	946				
2000	963				
2001	972				
2002	981				

2003	959				
2004	1.007				

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2005

15.6. Tabela prikazuje število registriranih novih osebnih avtomobilov v Sloveniji v obdobju 2000–2005.

Tabela 74: Število registriranih novih osebnih avtomobilov v Sloveniji

Leto	Št. registriranih novih osebnih avtomobilov
2000	63.640
2001	54.834
2002	52.701
2003	61.037
2004	63.704
2005	60.999

Vir: Motorevija, AMZS, januar-februar 2006

a) Izračunajte povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti v opazovanem obdobju.
b) S povprečnim koeficientom rasti napovejte število registriranih novih osebnih avtomobilov v letu 2012, če predpostavimo, da se bo do tega leta ohranila dinamika rasti iz obdobja 2000–2005.
c) Izpeljite napoved iz prejšnje točke z linearnim trendom.

15.7. Tabela prikazuje število v Sloveniji prodanih novih osebnih avtomobilov znamke Gama v obdobju 2004–2009 (prirejeni podatki). Poiščite enačbo paraboličnega trenda za število prodanih avtomobilov in zapišite vrednosti trenda v opazovanem obdobju. Napovejte število prodanih novih avtomobilov v letu 2010 ob predpostavki, da se bo izračunani trend ohranil tudi v tem letu.

Tabela 75: Število prodanih novih osebnih avtomobilov znamke Gama

Leto	Število prodanih novih osebnih avtomobilov
2004	1.008
2005	1.132
2006	1.176
2007	1.204
2008	1.160
2009	1.124
Σ	6.804

16 NALOGE ZA UTRJEVANJE

16.1. Izdelek je pred enim mesecem stal 25 EUR. Trgovec je najprej zvišal ceno za 8 %, ker pa je povpraševanje zaradi višje cene hitro upadlo, se je odločil izdelek poceniti za 6 %. Izračunajte končno ceno. Ali je izdelek zdaj dražji ali cenejši kot pred enim mesecem in za koliko odstotkov?

16.2. Bruto plačo delavcev A, B in C oblikujejo po treh kriterijih hkrati. Glede na izobrazbo bi bile njihove bruto plače v razmerju 1 : 1,2 : 1,4, glede na delovne izkušnje v razmerju 1,2 : 1,2 : 1 in glede na uspešnost pri delu v razmerju 1: 1,5 : 1,2. Delavec A zasluži 960 EUR bruto. Kolikšni sta bruto plači delavcev B in C?

16.3. Sto šestdeset delavcev naredi v 12 mesecih pri 7-urnem delavniku 422.800 m blaga. Koliko takega blaga bi naredilo 120 delavcev v 4 mesecih pri 8-urnem delavniku?

16.4. Šest kokoši znese v 6 dneh 6 jajc. Koliko jajc znese 36 kokoši v 36 dneh?

16.5. Na angleškem trgu stane 1 yd blaga 15 GBP (1 yd = 0,9144 m, 1 EUR = 0,8666 GBP, 1 EUR = 1,2808 USD). Koliko USD znaša na ameriškem trgu prodajna cena za 1 m tega blaga, če mora ameriški uvoznik pokriti 43 % stroškov, realizirati pa želi 9-odstotni dobiček?

16.6. Nagradni sklad 374 EUR razdelimo trem delavcem premo sorazmerno z njihovimi mesečnimi dohodki in hkrati obratno sorazmerno z njihovimi odsotnostmi z dela v zadnjem mesecu. Delavci zaslužijo zapored 400 EUR, 480 EUR in 640 EUR mesečno, v zadnjem mesecu so izostali z dela 1 dan, 3 dni oziroma 2 dneva. Kolikšne nagrade dobijo?

16.7. Nabavili smo bruto 2.400 kg blaga, tara je 8 %. Fakturna cena je 0,96 EUR/kg, vstopni DDV je 20 %. Za prevoz in skladiščenje smo z vključenim 20 % DDV plačali 82,8 EUR. Blago smo embalirali v 1/4 kg vrečke, za embaliranje smo skupaj z 20 % DDV plačali 71,04 EUR. Realizirati želimo 26 % maržo, DDV je 20 %, kalo je 4 %. Izračunajte prodajno ceno četrtkilogramske vrečke blaga z vključenim DDV.

16.8. Petnajstega aprila 2008 smo vložili 7.300 USD. Letna obrestna mera je 5,5 %, navadno dekurzivno obrestovanje, čas štejemo v dnevih.

a) Izračunajte stanje glavnice 4. julija istega leta.
b) Kolikšen znesek bi morali vložiti 15. aprila, da bi lahko 4. julija dvignili znesek 10.000 USD?

16.10. Petega januarja 2008 smo najeli kratkoročni kredit 2.000 EUR. Odplačali smo ga 12. avgusta 2008. Kreditni pogoji: 4,5 % letna obrestna mera, navadni obrestni račun.

a) Koliko EUR smo morali vrniti 12. avgusta 2008, če je banka obračunala kredit dekurzivno?
b) Koliko EUR smo prejeli 5. januarja 2008, če je banka obračunala kredit anticipativno?

16.11. Na začetku januarja, marca, maja in julija vložimo vsakič po 800 EUR. Obrestovanje je navadno dekurzivno, obrestna mera je 2,85 % p.a., čas štejemo v mesecih. Izračunajte stanje teh vlog konec decembra.

16.12. Podjetje je kratkoročno vezalo 90.000 EUR od 15. januarja 2009 do 27. marca 2009. Pogoji obrestovanja so: 3,20 % letna obrestna mera, dekurzivno obrestno obrestovanje, konformni obračun obresti, prvega dne posla ne štejemo, zadnji dan štejemo. Izračunajte stanje vloge na koncu posla.

16.13. Za tri mesece si sposodimo 4.000 EUR. Kreditni pogoji so: dekurzivno obrestno obrestovanje, 5,4 % letna obrestna mera. Koliko bomo morali vrniti, če je:
a) kapitalizacija mesečna z relativno obrestno mero,
b) kapitalizacija mesečna s konformno obrestno mero.

16.14. Izračunajte stanje glavnice 1.000 EUR po 9 mesecih dekurzivnega obrestovanja. Letna obrestna mera je 3,6 %. Pogoji obrestovanja:
a) navadno obrestovanje, obračun po mesecih,
b) obrestno obrestovanje z relativno obrestno mero, mesečna kapitalizacija,
c) obrestno obrestovanje z relativno obrestno mero, kvartalna kapitalizacija,
d) obrestno obrestovanje s konformno obrestno mero, mesečna kapitalizacija,
e) obrestno obrestovanje s konformno obrestno mero. kvartalna kapitalizacija.

16.15. Dolg 5.000 EUR smo poplačali s 70-dnevno zamudo. Letna obrestna mera za zamudne obresti je 12,5 %, dekurzivni obrestnoobrestni račun, dnevna kapitalizacija s konformno obrestno mero, neprestopno leto. Kolikšne so bile zamudne obresti?

16.16. Kredit 8.000 EUR poplačamo s štirimi enakimi letnimi anuitetami po 2.100 EUR, peta anuiteta je izravnalna. Kreditni pogoji so: 9 % letna obrestna mera, dekurzivno obrestno obrestovanje z letno kapitalizacijo. Sestavite amortizacijski načrt.

16.17. Najamemo 6-mesečni kredit za 1.760 EUR. Kreditni pogoji so: 6 % letna obrestna mera, dekurzivno obrestno obrestovanje, mesečna kapitalizacija z relativno obrestno mero. Dolg bomo poplačali s petimi enakimi mesečnimi postnumerandnimi anuitetami, zaokroženimi navzgor na desetice, šesta anuiteta bo izravnalna. Sestavite amortizacijski načrt.

16.18. Investicijski kredit v višini 44.000 EUR bomo poplačali s triletnim odlogom s 60 enakimi mesečnimi anuitetami, prva anuiteta valutira na začetku četrtega leta. Kreditni pogoji so: 6,2 % letna obrestna mera, dekurzivno obrestno obrestovanje, mesečna kapitalizacija s konformno obrestno mero. Kolikšne bodo anuitete?

16.19. Letna obrestna mera za rentno varčevanje je 4,2 %. Pogoji obrestovanja: dekurzivni obrestnoobrestni račun, mesečna kapitalizacija z relativno obrestno mero.
a) Kolikšen znesek moramo vložiti danes, da lahko dobivamo 10 let ob koncu vsakega meseca rento v višini 150 EUR.
b) Kolikšen znesek moramo vložiti danes, da lahko začnemo po 8 letih uživati desetletno mesečno rento v višini 150 EUR? Rentni zneski valutirajo na koncu mesecev.

16.20. Tabela prikazuje podatke o prometu in stanju zalog v podjetju H&H (prirejeni podatki).

Tabela 76: Promet in stanje zalog v podjetju H&H

Mesec	Promet v 1.000 EUR	Stanje zalog ob koncu meseca v 1.000 EUR

junij	–	72
julij	104	76
avgust	112	72
september	120	68
oktober	120	60
november	108	64
december	112	64

Izračunajte:

a) povprečni mesečni promet v opazovanem obdobju in povprečno stanje zalog,
b) povprečni mesečni in povprečni polletni koeficient obračanja zalog,
c) povprečno dolžino trajanja enega obrata zalog. Mesec šteje povprečno 25 delovnih dni.

16.21. Tabela prikazuje povprečne drobnoprodajne cene obutve. Izračunajte bazne indekse z osnovo v letu 2006, verižne indekse, koeficiente rasti in stopnje rasti za posamezne vrste čevljev. Izračunajte povprečno stopnjo rasti v opazovanem obdobju za posamezne vrste čevljev.

Tabela 77: Drobnoprodajne cene obutve

Leto	Moški nizki čevlji (par)	Ženski salonarji (par)
2003	69,30	54,61
2004	69,91	56,24
2005	72,30	61,16
2006	70,67	61,23
2007	70,68	65,75

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

16.22. Tabela prikazuje stanje vezanih vlog v domači valuti 31. 12. v obdobju 2002–2007. Valuta EUR je do vključno leta 2006 obravnavana kot tuja valuta, od leta 2007 pa kot domača valuta.

Tabela 78: Stanje vezanih vlog v domači valuti 31. 12.

Leto	Vezane vloge v 1.000 EUR
2002	3.155.984
2003	3.448.978
2004	3.248.110
2005	3.349.335
2006	3.430.579
2007	6.919.860

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

a) Izračunajte indekse s stalno osnovo v letu 2002.
b) Izračunajte indekse s stalno osnovo v letu 2005.
c) Izračunajte koeficiente rasti, verižne indekse in stopnje rasti.
d) Izračunajte povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti.

e) Kolikšno stanje sredstev prebivalstva lahko pričakujemo 31. decembra 2010, če predpostavimo, da se bo do konca tega leta ohranila povprečna dinamika rasti iz obdobja 2002–2007.

16.23. Tabela prikazuje gibanje povprečne drobnoprodajne cene ženskega kostima z dolgimi rokavi v obdobju 2003–2007.

Tabela 79: Povprečne drobnoprodajna cene ženskega kostima z dolgimi rokavi

Leto	Povprečna cena ženskega kostima z dolgimi rokavi v EUR
2003	225,99
2004	247,14
2005	234,01
2006	223,20
2007	225,29

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

a) Izračunajte povprečni koeficient rasti, povprečni verižni indeks in povprečno stopnjo rasti.
b) Kolikšno povprečno ceno ženskega kostima lahko pričakujemo v letu 2010, če predpostavimo, da se bo do tega leta ohranila povprečna dinamika rasti iz obdobja 2003–2007?
c) Izpeljite napoved iz prejšnje točke z linearnim trendom.

16.24. Trgovsko podjetje ima 270 dobaviteljev. Tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev dobaviteljev glede na vrednost dobave v tekočem letu (prirejeni podatki).

Tabela 80: Frekvenčna porazdelitev dobaviteljev glede na vrednost dobave

Vrednost dobave v 1.000 EUR	f_j					
od 200 do pod 240	34					
od 240 do pod 280	105					
od 280 do pod 320	73					
od 320 do pod 360	38					
od 360 do pod 400	15					
od 400 do pod 440	5					
Σ	270					

a) Dopolnite tabelo s relativnimi frekvencami, kumulativo frekvenc in kumulativo relativnih frekvenc.
b) Grafično prikažite frekvenčno porazdelitev s histogramom.
c) S poligonom prikažite kumulativo frekvenc.
d) Ocenite iz tabele ali iz grafa kumulative frekvenc:
   - koliko dobaviteljev je dobavilo več kot 360.000 EUR blaga;
   - koliko odstotkov dobaviteljev je dobavilo več kot 340.000 EUR blaga.
e) Izračunajte ocene za aritmetično sredino, modus in mediano ter ocenite asimetrijo porazdelitve.
f) Izračunajte standardni odklon in koeficient variabilnosti.

16.25. Tabela prikazuje uspeh 50 učencev neke osnovne šole pri nacionalnem preizkusu znanja iz slovenskega jezika (prirejeni podatki).

Tabela 81: Uspeh učencev pri nacionalnem preizkusu znanja iz slovenskega jezika

Ocena y_j	f_j
1	2
2	6
3	24
4	13
5	5

a) Prikažite porazdelitev ocen s histogramom.
b) Zapišite kumulativo frekvenc in narišite graf kumulative.
c) Izračunajte aritmetično sredino in standardno deviacijo porazdelitve.
d) Izračunajte modus in oceno za mediano ter ocenite asimetrijo porazdelitve.

16.26. Tabela prikazuje frekvenčno porazdelitev starosti matere ob otrokovem rojstvu v letu 2001.

Tabela 82: Starost matere ob otrokovem rojstvu v letu 2001

Starost matere ob otrokovem rojstvu (v letih)	y_j	f_j		
od 10 do pod 15		1		
od 15 do pod 20		441		
od 20 do pod 25		3.761		
od 25 do pod 30		7.028		
od 30 do pod 35		4.505		
od 35 do pod 40		1.514		
od 40 do pod 45		220		
od 45 do pod 50		7		
Σ		17.477		

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2002

a) Dopolnite tabelo s kumulativo frekvenc.
b) Narišite graf kumulative frekvenc.
c) Izračunajte ocene za aritmetično sredino, za mediano in za modus.
d) Izračunajte standardni odklon.

16.27. Tabela prikazuje gibanje povprečne premije obveznega avtomobilskega zavarovanja v obdobju 2003−2007 (vir: Statistični letopis 2008).

Tabela 83: Povprečna premija obveznega avtomobilskega zavarovanja

Leto	Povprečna premija obveznega avtomobilskega zavarovanja v EUR					
2003	288,58					
2004	313,73					
2005	316,02					
2006	315,76					
2007	320,47					

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

a) Izračunajte linearni trend povprečne premije.
b) Z linearnim trendom napovejte povprečno premijo v letu 2010.

17 REZULTATI NALOG

1. Razmerja in sorazmerja

1.1. $5:2$; $10:7$; $5:1$; $3:7$; $4:5$; $8:1$; $3:4:6$; $7:5:3:2$.
1.2. 140, 490
1.3. 84, 60
1.4. 144, 60, 48
1.5. $x:y=4:3$, $x:z=2:1$, $x:w=3:1$, $y:z=3:2$, $y:w=9:4$, $z:w=3:2$.
1.6. $a:b:c=21:12:4$
1.7. $a:b:c:d=8:6:15:10$
1.8. $a:b:c:d=30:40:28:35$, $a:c=15:14$, $a:d=6:7$, $b:d=8:7$
1.9. $2:9$; $15:10:6$; $10:5:20:4$; $8:6:4:3$; $2:3:4:5$.
1.10. 720 EUR

2. Sklepni račun

2.1. 336,00 EUR
2.2. 32 ur, 2 uri, 36 sekund (odgovor na tretje vprašanje je nesmiseln)
2.3. 120 m
2.4. 6 dni
2.5. 127,06 m
2.6. 90 cm
2.7. 1.050 m
2.8. 101,25 m
2.9. 10 ur na dan
2.10. 120 dni
2.11. 54 jajc; v 6 dneh

3. Verižni račun

3.1. 17,67 EUR
3.2. 121,15 EUR
3.3. 120,49 EUR
3.4. 13,96 EUR
3.5. 23.244,02 CHF
3.6. 5.119,70 USD

4. Razdelilni račun

4.1. 2.450 EUR, 1.400 EUR
4.2. 14 EUR, 28 EUR, 35 EUR

4.3. 2.000 EUR, 1.400 EUR, 1.400 EUR
4.4. 270 EUR, 150 EUR, 90 EUR
4.5. 390 EUR, 260 EUR, 195 EUR
4.6. Delilno razmerje je 15:6:5. Nagrade znašajo 750 EUR, 300 EUR, 250 EUR.
4.7. 18.720 d.e., 27.300 d.e., 23.400 d.e.
4.8. 32.000 d.e., 24.000 d.e., 25.000 d.e.

5. Procentni račun

5.1. 15,4 kg; 12,5 %
5.2. Serija A: 17 % izdelkov I. kvalitete, serija B: 15,83 % izdelkov I. kvalitete. Serija A je boljša.
5.3. 58,33 %
5.4. 1.160 EUR
5.5. 6 %
5.6. Nova cena je 40,25 EUR.
5.7. 7,5 ‰
5.8. 38 EUR
5.9. 645 EUR
5.10. 56 EUR
5.11. 17,60 EUR
5.12. 210 EUR
5.13. Prodajna cena je 155 EUR, DDV znaša 31 EUR.
5.14. Za 5,26 % oziroma za 1 odstotno točko
5.15. 1.350 EUR
5.16. Končna cena izdelka je 253,04 EUR. Izdelek je zdaj dražji za 1,22 %.
5.17. Stara cena delnice 200 EUR, zaslužek 732,80 EUR.
5.18. 22,13 %
5.19. 29,50 %
5.20. Izdelek je zdaj cenejši za 4,8 %.
5.21. Za izdelek smo plačali 472 EUR, vrnili nam bodo 72 EUR.

6. Kalkulacije

6.1. 0,53 EUR/kg
6.2. 0,60 EUR za 1/4 kg vrečko
6.3. 2,79 EUR/kg
6.4. 0,93 EUR za 1/4 kg zavitek
6.5. 6,82 EUR za kos
6.6. Podjetnik A: 2,56 EUR za zavitek, podjetnik B: 2,52 EUR za zavitek (27,57 % marža).
6.7. Razmerje ekvivalentnih števil $a : b : c : d = 320 : 200 : 360 : 240 = 1,6 : 1 : 1,8 : 1,2$. Če izberemo za izhodišče npr. izdelek vrste B, je $b = 1$ in zato $a = 1,6$, $c = 1,8$, $d = 1,2$. Transportni stroški na obračunsko enoto tedaj znašajo 0,15 EUR.

Tabela 84: Proizvedene enote in transportni stroški za 4 vrste izdelka

Vrsta izdelka	Proizvedene enote	Ekvivalentna števila	Obračunske enote	Stroški	Stroški na enoto
A	4.000	1,6	6.400	960	0,24
B	6.200	1	6.200	930	0,15
C	5.000	1,8	9.000	1.350	0,27
D	7.500	1,2	9.000	1.350	0,18
Skupaj			30.600	4.590	

7. Navadni obrestni račun

7.1. 119,59 EUR
7.2. 16.125 EUR
7.3. 12.350 EUR
7.4. 6 %
7.5. 15.345,21 EUR
7.6. Najkasneje po 126 dneh.
7.7. Vsaj 331 dni.
7.8. 11.360,95 EUR
7.9. 12.300 EUR, 141,53 EUR
7.10. 2.350 EUR
7.11. 200 EUR
7.12. 2.488 EUR
7.13. 65 dni prej, tj. 27. maja.
7.14. 75.000 EUR
7.15. 74.666,66 EUR
7.16. 4.762,50 EUR, 5.249,34 EUR

8. Obrestno obrestni račun

8.1. 1.800 EUR
8.2. 4,2 % p.a.
8.3. 7 let
8.4. v 5 letih
8.5. 11 let
8.6. 11,9 let; 9,0 let; 8,0 let; 6,1 let.
8.7. 8.781,79 EUR, 8 859,06 EUR
8.8. a) $p = 5{,}26\ \%$; b) $\pi = 5\ \%$
8.9. 5 let
8.10. 1.524,17 EUR
8.11. 1.166,40 EUR b) 1.169,86 EUR c) 1.171,66 EUR
8.12. 2.039,19 EUR
8.13. 5.0231,21 EUR
8.14. 61 dni zamude; konformni način: 18,36 V; linearni način: 19,22 EUR.
8.15. 5.289,91 EUR b) 5.301,28 V
8.16. 3.608,61 EUR
8.17. 6.387,11 EUR

8.18. 170,17 EUR
8.19. Q = 14.000 EUR
8.20. a = 15.609,64 EUR
8.21. izravnalna anuiteta a_4 = 14.329,98 EUR
8.22. izravnalna anuiteta a_6 = 2.774,48 EUR
8.23. 1.176,65 EUR
8.24. Z relativno obrestno mero: a) 525,45 EUR b) 551,24 EUR
S konformno obrestno mero: a) 522,97 EUR b) 548,07 EUR.
8.25. $a = \frac{Gr^7(r^4 - 1)}{r^5 - 1} = 3.343{,}71$ EUR

10. Relativna števila

10.1. Strukture: 13,88 %, 23,59 %, 20,35 %, 24,74 %, 16,19 %, 1,25 %, vsota strukturnih odstotkov je 100,00 %.
10.2. Stolpčna struktura:

Tabela 85: Zaposleni v trgovini po spolu in stopnji strokovne izobrazbe v Sloveniji 31. 12. 2004, stolpčna struktura

Spol	Stopnja strokovne izobrazbe				
	Visoka	Višja	Srednja	Poklicna in nižja	Skupaj
Moški	47,1	51,9	43,7	49,0	47,1
Ženske	52,9	48,1	56,3	51,0	52,9
Skupaj	100	100	100	100	100

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2005

Vrstična struktura:

Tabela 86: Zaposleni v trgovini po spolu in stopnji strokovne Izobrazbe v Sloveniji 31. 12. 2004, vrstična struktura

Spol	Stopnja strokovne izobrazbe				
	Visoka	Višja	Srednja	Poklicna in nižja	Skupaj
Moški	8,0	5,5	32,1	54,4	100
Ženske	8,0	4,6	36,9	50,5	100
Skupaj	8,0	5,0	34,6	52,4	100

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2005

Kotna struktura:

Tabela 87: Zaposleni v trgovini po spolu in stopnji strokovne izobrazbe v Sloveniji 31. 12. 2004, kotna struktura

Spol	Stopnja strokovne izobrazbe				
	Visoka	Višja	Srednja	Poklicna in nižja	Skupaj
Moški	3,8	2,6	15,1	25,7	47,1
Ženske	4,2	2,4	19,5	26,7	52,9
Skupaj	8,0	5,0	34,6	52,4	100

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2005

10.3.

Tabela 88: Površina prodajnega prostora na prodajalno, površina prodajnega prostora na zaposlenega in število zaposlenih na prodajalno v slovenskih trgovinah konec leta 1998

Vrsta trgovine	Površina prodajnega prostora v m^2 na prodajalno	Površina prodajnega prostora v m^2 na zaposlenega	Število zaposlenih na prodajalno
Trgovina na drobno z živili, pijačami in tobakom	103,7	24,9	4,2
Trgovina na drobno z neživili	102,2	33,9	3,0
Trgovina na drobno z motornimi vozili	112,0	42,1	2,7
Trgovina na drobno z motornimi gorivi	48,4	8,5	5,7
Skupaj	101,6	29,1	3,5

Vir: Statistični letopis Slovenije, 1999

10.4.

a) 144 tisoč EUR mesečno na 10 prodajalcev
b) 1,3 krat mesečno, 15,8 krat letno.
c) Povprečna dolžina enega obrata zalog je 18,2 dni.

10.5. Povprečno stanje zalog $\overline{X} = 17.942$ EUR, $K = 10,2$ krat v letu, $K_r = 28,5$ dni

10.6. a) 274.000 EUR b) K = 1,52 krat mesečno c) 16,4 dni

10.7.

Tabela 89: Prenočitve turistov v Sloveniji v obdobju 2003–2007, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Število prenočitev gostov v 1.000	Indeksi s stalno osnovo (bazično leto 2000)	Koeficienti rasti	Verižni indeksi	Stopnje rasti
2003	7.503	100	–	–	–
2004	7.589	101,1	1,011	101,1	1,1
2005	7.572	100,9	0,998	99,8	-0,2
2006	7.722	102,9	1,020	102,0	2,0
2007	8.261	110,0	1,070	107,0	7,0

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.8.

Tabela 90: Struktura prebivalstva Slovenije po aktivnosti v 2. četrtletju, koeficienti rasti in stopnje rasti

Leto	Aktivno prebivalstvo		Delovno aktivno prebivalstvo		Brezposelne osebe		Neaktivno prebivalstvo	
	K_j	S_j	K_j	S_j	K_j	S_j	K_j	S_j
2003	–	–	–	–	–	–	–	–
2004	1,050	5,0	1,056	5,6	0,968	-3,2	0,946	-5,4
2005	0,998	-0,2	1,001	0,1	0,951	-4,9	1,010	1,0
2006	1,025	2,5	1,023	2,3	1,052	5,2	0,977	-2,3
2007	1,012	1,2	1,026	2,6	0,787	-21,3	0,997	-0,3

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.9.

Tabela 91: Povprečne mesečne neto plače na zaposleno osebo pri pravnih osebah, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Neto v EUR	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2000	503,63	71,8	–	–	–
2001	562,74	80,2	1,117	111,7	11,7
2002	617,37	88,0	1,097	109,7	9,7
2003	663,80	94,6	1,075	107,5	7,5
2004	701,90	100	1,057	105,7	5,7
2005	735,73	104,8	1,048	104,8	4,8
2006	773,42	110,2	1,051	105,1	5,1
2007	834,50	118,9	1,079	107,9	7,9

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.10.

Tabela 92: Diplomanti višjih strokovnih šol v obdobju 2003–2007, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Skupaj	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2003	1.250	68,3	–	–	–
2004	1.829	100	1,463	146,3	46,3
2005	2.330	127,4	1,274	127,4	27,4
2006	2.834	154,9	1,216	121,6	21,6
2007	2.874	157,1	1,014	101,4	1,4

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 93: Diplomanti ženskega spola višjih strokovnih šol v obdobju 2003–2007, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Ženske	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2003	589	63,9	–	–	–
2004	922	100	1,565	156,5	56,5
2005	1.206	130,8	1,308	130,8	30,8
2006	1.511	163,9	1,253	125,3	25,3
2007	1.522	165,1	1,007	100,7	0,7

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.11.

Tabela 94: Povprečna letna količina nabavljenega kruha in peciva na člana gospodinjstva, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Kruh in pecivo v kg	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2002	56,8	113,6	–	–	–
2003	52,8	105,6	0,930	93,0	-7,0
2004	50,0	100	0,947	94,7	-5,3
2005	46,1	92,2	0,922	92,2	-7,8
2006	42,3	84,6	0,918	91,8	-8,2

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 95: Povprečna letna količina nabavljene govedine na člana gospodinjstva, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Govedina v kg	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2002	9,0	97,8	–	–	–
2003	8,9	96,7	0,989	98,9	-1,1
2004	9,2	100	1,034	103,4	3,4
2005	8,9	96,7	0,967	96,7	-3,3
2006	8,9	96,7	1,000	100,0	0,0

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 96: Povprečna letna količina nabavljenega sladkorja in medu na člana gospodinjstva, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Sladkor in med v kg	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2002	14,2	110,9	–	–	–
2003	13,8	107,8	0,972	97,2	-2,8
2004	12,8	100	0,928	92,8	-7,2
2005	11,3	88,3	0,883	88,3	-11,7
2006	10,6	82,8	0,938	93,8	-6,2

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 97: Povprečna letna količina nabavljenega vina na člana gospodinjstva, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Vino v litrih	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2002	7,5	107,1	–	–	–
2003	6,9	98,6	0,920	92,0	-8,0
2004	7,0	100	1,014	101,4	1,4
2005	6,6	94,3	0,943	94,3	-5,7
2006	6,1	87,1	0,924	92,4	-7,6

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

10.12.

Tabela 98: Povprečne drobroprodajne cene belega kruha, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Beli kruh v EUR/kg	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2003	1,65	94,3	–	–	–
2004	1,75	100	1,061	106,1	6,1
2005	1,84	105,1	1,051	105,1	5,1
2006	1,77	101,1	0,962	96,2	-3,8
2007	1,84	105,1	1,040	104,0	4,0

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 99: Povprečne drobroprodajne cene govejega mesa, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Goveje meso brez kosti v EUR/kg	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2003	6,80	105,4	–	–	–
2004	6,45	100	0,949	94,9	-5,1
2005	6,25	96,9	0,969	96,9	-3,1
2006	6,93	107,4	1,109	110,9	10,9
2007	7,10	110,1	1,025	102,5	2,5

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 100: Povprečne drobroprodajne cene sladkorja, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Sladkor v EUR/kg	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2003	0,78	90,7	–	–	–
2004	0,86	100	1,103	110,3	10,3
2005	0,87	101,2	1,012	101,2	1,2
2006	0,82	95,3	0,943	94,3	-5,7
2007	0,82	95,3	1,000	100,0	0,0

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 101: Povprečne drobroprodajne cene kakovostnega belega vina, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Kakovostno belo vino v EUR /l	$I_{j/2004}$	K_j	V_j	S_j
2003	2,26	112,4	–	–	–
2004	2,01	100	0,889	88,9	-11,1
2005	1,90	94,5	0,945	94,5	-5,5
2006	1,92	95,5	1,011	101,1	1,1
2007	2,06	102,5	1,073	107,3	7,3

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

11. Frekvenčne porazdelitve

11.1.

a)

Tabela 102: Frekvenčna porazdelitev trgovin v regiji po vrednosti prometa

Vrednost prometa v 1.000 EUR	Število trgovin f_j	f_j^0	F_j	F_j^0
nad 150–250	8	0,076	8	0,076
nad 250–350	11	0,105	19	0,181
nad 350–450	27	0,257	46	0,438
nad 450–550	32	0,305	78	0,743
nad 550–650	18	0,171	96	0,914
nad 650–750	9	0,086	105	1
Skupaj	105	1	–	–

d)

- 19 trgovin je imelo največ 350.000 EUR prometa,
- 9 trgovin je imelo več kot 650.000 EUR prometa,
- 48 (49) trgovin je imelo med 300.000 in 500.000 EUR prometa,

- 18 trgovin je imelo nad 600.000 EUR prometa,
- 13 (14) trgovin je imelo manj kot 300.000 EUR prometa.

e)

- 56,2 % trgovin je imelo več kot 450.000 EUR prometa,
- 74,3 % trgovin je imelo manj kot 550.000 EUR prometa.

11.2.

a)

Tabela 103: Frekvenčna porazdelitev prodajaln po površini prodajnega prostora

Površina prodajnega prostora v m^2	y_j	f_j	f_j^0	F_j	F_j^0
od 50 do pod 70	60	4	0,0615	4	0,0615
od 70 do pod 90	80	6	0,0923	10	0,1538
od 90 do pod 110	100	8	0,1231	18	0,2769
od 110 do pod 130	120	10	0,1538	28	0,4307
od 130 do pod 150	140	17	0,2615	45	0,6923
od 150 do pod 170	160	11	0,1692	56	0,8615
od 170 do pod 190	180	7	0,1077	63	0,9692
od 190 do pod 210	200	2	0,0308	65	1
Skupaj	–	$N = 65$	0,9999	–	–

b) Vsaj 162,7 m^2 prodajnega prostora.
c) Približno 64,6 % prodajaln.

11.3.

Tabela 104: Frekvenčna porazdelitev doseženih ocen pri pisnem izpitu

Ocena y_j	$y_{j,\min}$	$y_{j,\max}$	Št. študentov f_j	f_j^0	F_j	F_j^0
5	4,5	5,5	2	0,011	2	0,011
6	5,5	6,5	24	0,133	26	0,144
7	6,5	7,5	60	0,333	86	0,477
8	7,5	8,5	64	0,356	150	0,833
9	8,5	9,5	24	0,133	174	0,967
10	9,5	10,5	6	0,033	180	1
Σ	–	–	180	0,999	–	–

11.4.

b) Več kot 1.067 EUR;
manj kot 665 EUR;
13,75 % delavcev zasluži več kot 1.000 EUR neto na mesec;
27,8 % delavcev zasluži manj kot 700 EUR neto na mesec.

12. Kvantili

12.1. Kvartili: $Q_1 = 41{,}25$ točk, $Q_2 = y_8 = 49$ točk, $Q_3 = 64{,}5$ točk.
Izbrana decila: $D_1 = y_2 = 27$ točk, $D_9 = y_{14} = 70$ točk.

Ocena za delež študentov, ki so dosegli največ 40 točk: 22,22 % ($P = 0{,}2222$). Natančen delež: tak uspeh so dosegli 3 študenti, torej 20 % populacije.

12.2. Kvartili: $Q_1 = 6{,}825$, $Q_2 = 7{,}570$, $Q_3 = 8{,}273$.

Izbrana decila: $D_1 = 6{,}1875$, $D_9 = 9{,}0208$.

12.3.

a) Kvartili: $Q_1 = 124 \text{ m}^2$, $Q_2 = 140{,}67 \text{ m}^2$, $Q_3 = 158 \text{ m}^2$.

Izbrana decila: $D_1 = 97{,}5 \text{ m}^2$, $D_9 = 184{,}44 \text{ m}^2$.

b) $127{,}33 \text{ m}^2$;

c) 64 %;

d) 24 %.

13. Srednje vrednosti

13.1.

Tabela 105: Frekvenčna porazdelitev prodajaln po površini prodajnega prostora

Površina prodajnega prostora v m^2	y_j	f_j	F_j	$f_j y_j$
od 50 do pod 70	60	4	4	240
od 70 do pod 90	80	6	10	480
od 90 do pod 110	100	8	18	800
od 110 do pod 130	120	10	28	1.200
od 130 do pod 150	140	17	45	2.380
od 150 do pod 170	160	11	56	1.760
od 170 do pod 190	180	7	63	1.260
od 190 do pod 210	200	2	65	400
Skupaj	–	$N = 65$	–	8.520

$M^* = 131{,}1 \text{ m}^2$, $Me^* = 135{,}9 \text{ m}^2$, $Mo^* = 140{,}8 \text{ m}^2$

13.2.

Tabela 106: Frekvenčna porazdelitev ocen študentov pri pisnem izpitu

Ocena y_j	$y_{j,\min}$	$y_{j,\max}$	Št. študentov f_j	F_j	$f_j y_j$
5	4,5	5,5	2	2	10
6	5,5	6,5	24	26	144
7	6,5	7,5	60	86	420
8	7,5	8,5	64	150	512
9	8,5	9,5	24	174	216
10	9,5	10,5	6	180	60
Σ	–	–	180	–	1.362

$M = 7{,}567$, $Me^* = 7{,}570$, $Mo^* = 7{,}591$, $Mo = 8$

13.3. $M^* = 824{,}50$ EUR, $Me^* = 800{,}34$ EUR, $Mo^* = 765{,}33$ EUR

13.4.

Tabela 107: Število prebivalcev, število avtomobilov in število prebivalcev na avtomobil v občinah A, B in C

Občina	Število prebivalcev	Število avtomobilov	Št. prebivalcev na avtomobil
A	16.320	5.100	3,2
B	10.530	3.510	3
C	8.120	2.900	2,8
Σ	34.970	11.510	-

V treh občinah skupaj je povprečno 3,04 prebivalca na avtomobil.

13.5. b) $\overline{K} = \sqrt[5]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2002}}} = 1{,}044$, $\overline{V} = 104{,}4$, $\overline{S} = 4{,}4\%$

c) Pričakujemo lahko $Y_{2010} = Y_{2007} \cdot \overline{K}^3 = 2.681.000 \cdot 1{,}044^3 = 3.051.000$ turistov

13.6. a) $\overline{K} = \sqrt[7]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2000}}} = 1{,}075$, $\overline{V} = 107{,}5$, $\overline{S} = 7{,}5\%$

b) $Y_{2010} = Y_{2007} \cdot \overline{K}^3 = 1.036{,}70$ EUR

c) $\overline{K} = \sqrt[3]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2004}}} = 1{,}059$, $Y_{2010} = Y_{2007} \cdot \overline{K}^3 = 991{,}09$ EUR

13.7. a) $\overline{K} = \sqrt[8]{\frac{Y_{2004}}{Y_{1996}}} = 0{,}982$, $\overline{V} = 98{,}2$, $\overline{S} = -1{,}8\%$

b) $Y_{2010} = Y_{2004} \cdot \overline{K}^6 = 5.881$ sklenjenih zakonskih zvez

13.8.

a) $\overline{K} = \sqrt[4]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2003}}} = 1{,}045$, $\overline{V} = 104{,}5$, $\overline{S} = 4{,}5\%$

b) $Y_{2014} = Y_{2007} \cdot \overline{K}^7 = 3.912$ mio minut

13.9. Kruh in pecivo: $\overline{K} = \sqrt[4]{\frac{Y_{2006}}{Y_{2002}}} = 0{,}929$, $\overline{V} = 92{,}9$, $\overline{S} = -7{,}1\%$

Vino: $\overline{K} = \sqrt[4]{\frac{Y_{2006}}{Y_{2002}}} = 0{,}950$, $\overline{V} = 95{,}0$, $\overline{S} = -5{,}0\%$

13.10. b) $\overline{K} = \sqrt[5]{\frac{Y_{2005}}{Y_{2000}}} = 0{,}992$, $\overline{V} = 99{,}2$, $\overline{S} = -0{,}8\%$,

c) $Y_{2011} = Y_{2005} \overline{K}^6 = 58.129$ registriranih novih osebnih avtomobilov

14. Mere variabilnosti

14.1.

Tabela 108: Frekvenčna porazdelitev doseženih ocen pri pisnem izpitu

Ocena y_j	Št. študentov f_j	$f_j y_j$	$f_j y_j^2$
5	2	10	50
6	24	144	864
7	60	420	2.940
8	64	512	4.096
9	24	216	1.944
10	6	60	600
Σ	180	1.362	10.494

a) $M^* = 7{,}567$

b) $\sigma = 1{,}020$, $KV = 0{,}135$

14.2.

a) $M^* = 824{,}50$ € .

b) $\sigma = 182{,}76$ € , $KV = 0{,}22$, $\sigma_{kor} = 173{,}40$ € , $KV' = 0{,}21$

14.3.

Tabela 109: Frekvenčna porazdelitev števila otrok v družini

y_j	f_j	F_j	$f_j y_j$	$f_j y_j^2$
0	10	10	0	0
1	90	100	90	90
2	74	174	148	296
3	20	194	60	180
4	4	198	16	64
5	2	200	10	50
Σ	200		324	680

b) $M^* = \dfrac{324}{200} = 1{,}62$, $\sigma^2 = \dfrac{680}{200} - 1{,}62^2 = 0{,}7756$, $\sigma \approx 0{,}88$

c) $Me^* = 1{,}51$, $Mo^* = 1{,}33$

15. Analiza časovnih vrst

15.1.

a) $t(2004) = 0 \Rightarrow T_t = 7.541{,}4 + 87{,}1\,t$

[varianta: $t(2002) = 1 \Rightarrow T_t = 7.280{,}1 + 87{,}1\,t$]

b)

Tabela 110: Linearni trend števila prenočitev turistov v Sloveniji

Leto	t	T_t (v 1000)
2002	–2	7.367
2003	–1	7.454
2004	0	7.541
2005	1	7.629
2006	2	7.716

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

c) $t(2010) = 6 \Rightarrow T_6 = 8.064$ tisoč prenočitev;

$t(2012) = 8 \Rightarrow T_8 = 8.238$ tisoč prenočitev.

d) $\overline{K} = \sqrt[4]{\dfrac{Y_{2006}}{Y_{2002}}} = 1{,}011$;

v l. 2010 pričakujemo $7.722\,\text{tisoč} \cdot 1{,}011^4 = 8.067$ tisoč prenočitev;

v l. 2012 pričakujemo $7.722\,\text{tisoč} \cdot 1{,}011^6 = 8.246$ tisoč prenočitev.

15.2.

a) $t(2005) = 0 \Rightarrow T_t = 950{,}4 + 21{,}9\,t$

[varianta: $t(2003) = 1 \Rightarrow T_t = 884{,}7 + 21{,}9\,t$]

Tabela 111: Delovno aktivno prebivalstvo v 2. četrtletju, linearni trend

Leto	Delovno aktivno prebivalstvo Y_t (v 1.000)	t	T_t (v 1.000)
2003	896	–2	907
2004	946	–1	929
2005	947	0	950
2006	969	1	972
2007	994	2	994

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

b) $\overline{K} = \sqrt[4]{\dfrac{Y_{2007}}{Y_{2003}}} = 1{,}026$, pričakovano število aktivnega prebivalstva

v letu 2011 je $994.000 \cdot 1{,}026^4 \approx 1.101.000$;

$t(2011) = 6 \Rightarrow T_6 \approx 1.082.000$.

c) $t(2005) = 0 \Rightarrow T_t = 58{,}2 - 3{,}0t$ [varianta: $t(2003) = 1 \Rightarrow T_t = 67{,}2 - 3{,}0t$]

Tabela 112: Brezposelne osebe v 2. četrtletju, linearni trend

Leto	Brezposelne osebe Y_t (v 1.000)	t	T_t (v 1.000)
2003	63	–2	64
2004	61	–1	61
2005	58	0	58
2006	61	1	55
2007	48	2	52

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

d) $\overline{K} = \sqrt[4]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2003}}} = 0{,}947$, v letu 2011 pričakujemo $48.000 \cdot 0{,}947^4 \approx 39.000$

$t(2011) = 6 \Rightarrow T_6 \approx 40\,000$

15.3.

a) $t(2004) = 0 \Rightarrow T_t = 698{,}494 + 42{,}833\,t$

[varianta: $t(2001) = 1 \Rightarrow T_t = 527{,}162 + 42{,}833\,t$]

Tabela 113: Povprečne mesečne plače na zaposleno osebo pri pravnih osebah, linearni trend

Leto	Neto v EUR	t	T_t
2001	562,74	–3	570,00
2002	617,37	–2	612,83
2003	663,80	–1	655,66
2004	701,90	0	698,49
2005	735,73	1	741,33
2006	773,42	2	784,16
2007	834,50	3	826,99

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

b) $t(2012) = 8 \Rightarrow T_8 = 1.041{,}16$ EUR

c) $\overline{K}_{2001-2007} = \sqrt[6]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2001}}} = 1{,}068$, $Y_{2012} = 834{,}50 \cdot 1{,}068^5 = 1.159{,}53$ EUR

d) $\overline{K}_{2004-2007} = \sqrt[3]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2004}}} = 1{,}059$, $Y_{2012} = 834{,}50 \cdot 1{,}059^5 = 1.111{,}49$ EUR

15.4.

a) $t(2002) = 0 \Rightarrow T_t = 6.902{,}8 - 146{,}5\,t$

[varianta: $t(2000) = 1 \Rightarrow T_t = 7.342{,}3 - 146{,}5\,t$]

b) Napoved za leto 2010: $t(2010) = 8 \Rightarrow T_8 = 5.731$ sklenjenih zakonskih zvez.

15.5.

Tabela 114: Število aktivnega prebivalstva v Sloveniji v 2. četrtletju, linearni trend

Leto	Aktivno prebivalstvo v 1.000	t	t^2	tY_t	T_t (v 1.000)
1999	946	–2,5	6,25	–2.365	950
2000	963	–1,5	2,25	–1.444,5	958
2001	972	–0,5	0,25	–486	967
2002	981	0,5	0,25	490,5	976
2003	959	1,5	2,25	1.438,5	984
2004	1.007	2,5	6,25	2.517,5	993
Σ	5.828	0	17,5	151	

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2005

$$a=\frac{5.828}{6}\approx 971{,}3\,;\; b=\frac{151}{17{,}5}\approx 8{,}6\,;\; T_t=971{,}3+8{,}6\,t$$

15.6.

a) $\overline{K}=\sqrt[5]{\dfrac{Y_{2005}}{Y_{2000}}}=0{,}992$, $\overline{V}=99{,}2$, $\overline{S}=-0{,}8\%$

b) $Y_{2012}=Y_{2005}\overline{K}^{\,7}=57.664$ registriranih novih osebnih avtomobilov

c) $T_t=59.485{,}8+621{,}2\ t$, $t(2012)=9{,}5$, $T_{9,5}=65.387$ registriranih novih osebnih avtomobilov

15.7.

Tabela 115: Število prodanih novih osebnih avtomobilov znamke Gama, parabolični trend

Leto	Y_t	t	t^2	t^4	tY_t	t^2Y_t	T_t
2004	1.008	–2,5	6,25	39,0625	–2.520	6.300	1.016
2005	1.132	–1,5	2,25	5,0625	–1.698	2.547	1.118
2006	1.176	–0,5	0,25	0,0625	–588	294	1.179
2007	1.204	0,5	0,25	0,0625	602	301	1.199
2008	1.160	1,5	2,25	5,0625	1.740	2.610	1.177
2009	1.124	2,5	6,25	39,0625	2.810	7.025	1.115
Σ	6.804	0	17,5	88,375	346	19.077	

$$\overline{Y}=\frac{1}{6}\cdot 6804=1134 \qquad c=\frac{\frac{1}{6}\cdot 19077-\frac{1}{6}\cdot 17{,}5\cdot 1134}{\frac{1}{6}\cdot 88{,}375-\left(\frac{1}{6}\cdot 17{,}5\right)^2}\approx -20{,}6$$

$$b=\frac{346}{17{,}5}\approx 19{,}8 \qquad a=1134-(-20{,}6)\cdot\frac{1}{6}\cdot 17{,}5\approx 1194{,}1$$

$T_t=1194{,}1+19{,}8\,t-20{,}6\,t^2$

Napoved za l. 2010: $t(2010)=3{,}5\Rightarrow T_{3,5}=1011{,}05$

Napovedujemo prodajo 1011 novih osebnih avtomobilov.

16. Naloge za utrjevanje

16.1. Končna cena je 25,38 EUR. Izdelek je dražji za 1,52 %.
16.2. B = 1.728 EUR, C = 1.344 EUR
16.3. 120.800 m
16.4. 216 jajc
16.5. 37,79 USD
16.6. 170 EUR, 68 EUR, 136 EUR
16.7. 0,34 EUR za četrtkilogramsko vrečko
16.8. a) 7.388 USD, b) 9.880,89 USD
16.9. a) 2.054 EUR, b) 1.946 EUR
16.10. 3.268,40 EUR
16.11. 90.553,14 EUR
16.12. a) 4.054,24 EUR, b) 4.052,94 EUR
16.13. a) 1.027 EUR, b) 1.027,33 EUR, c) 1.027,24 EUR, d) in e) 1.026,88 EUR
16.15. 114,23 EUR
16.16.

Tabela 116: Amortizacijski načrt, štiri enake anuitete in izravnalna anuiteta

n	a_n	o_n	Q_n	D_n
0				8.000,00
1	2.100,00	720,00	1.380,00	6.620,00
2	2.100,00	595,80	1.504,20	5.115,80
3	2.100,00	460,42	1.639,58	3.476,22
4	2.100,00	312,86	1.787,14	1.689,08
5	1.841,10	152,02	1.689,08	0
Σ	10.241,10	2.241,10	8.000,00	-

16.17. $p_m = 0{,}5\%$, $a = 298{,}49$ EUR,

zaokrožene anuitete $a_1 = a_2 = \cdots = a_5 = 300$ EUR,

$a_6 = 290{,}81$ EUR

16.18. $$Dr^8 = a\sqrt[12]{r}\,\frac{r^5 - 1}{\sqrt[12]{r} - 1} \Rightarrow a = \frac{Dr^8(\sqrt[12]{r} - 1)}{\sqrt[12]{r}\,(r^5 - 1)} = 1.014{,}52 \text{ EUR}$$

16.19. $r_m = 1{,}0035$, a) $$V = \frac{a(r_m^{120} - 1)}{r_m^{120}(r_m - 1)} = 14.677{,}34 \text{ EUR},$$

b) $$V = \frac{a(r_m^{120} - 1)}{r_m^{216}(r_m - 1)} = 10.494{,}92 \text{ EUR}$$

16.20. Povprečni mesečni promet:113.000 EUR, povprečno stanje zalog: 68.000 EUR
b) 1,66 krat/mesec, 9,97 krat/polletje, c) 15,0 dni

16.21.

Tabela 117: Povprečne drobnoprodajne cene moških nizkih čevljev, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Moški nizki čevlji (par)	$I_{j/2006}$	K_j	V_j	S_j
2003	69,30	98,1	–	–	–
2004	69,91	98,9	1,009	100,9	0,9
2005	72,30	102,3	1,034	103,4	3,4
2006	70,67	100	0,977	97,7	-2,3
2007	70,68	100,0	1,000	100,0	0,0

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Tabela 118: Povprečne drobnoprodajne cene ženskih salonarjev, indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Ženski salonarji (par)	$I_{j/2006}$	K_j	V_j	S_j
2003	54,61	89,2	–	–	–
2004	56,24	91,9	1,030	103,0	3,0
2005	61,16	99,9	1,087	108,7	8,7
2006	61,23	100	1,001	100,1	0,1
2007	65,75	107,4	1,074	107,4	7,4

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

Moški nizki čevlji: $\overline{K} = \sqrt[4]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2003}}} = 1{,}005$, $\overline{V} = 100{,}5$, $\overline{S} = 0{,}5\ \%$.

Ženski salonarji: $\overline{K} = \sqrt[4]{\frac{Y_{2007}}{Y_{2003}}} = 1{,}048$, $\overline{V} = 104{,}8$, $\overline{S} = 4{,}8\ \%$.

16.22. a), b), c)

Tabela 119: Stanje vezanih vlog v domači valuti 31. 12., indeksi s stalno osnovo, koeficienti rasti, verižni indeksi in stopnje rasti

Leto	Vezane vloge v 1.000 EUR	Bazni indeks l. 2002 =100	Bazni indeks l. 2005 =100	Koeficienti rasti	Verižni indeksi	Stopnje rasti v %
2002	3.155.984	100	94,2	–	–	–
2003	3.448.978	109,3	103,0	1,093	109,3	9,3
2004	3.248.110	102,9	97,0	0,942	94,2	-5,8
2005	3.349.335	106,1	100	1,031	103,1	3,1
2006	3.430.579	108,7	102,4	1,024	102,4	2,4
2007	6.919.860	219,3	206,6	2,017	201,7	101,7

Vir: Statistični letopis Slovenije, 2008

d) $\overline{K} = 1{,}170$, $\overline{V} = 117{,}0$, $\overline{S} = 17{,}0\ \%$

e) Pričakovano stanje 31. 12. 2010:

$6.919.860.000 \cdot 1{,}170^3 = 11.082.938.000$ EUR

16.23. a) $\overline{K} = \sqrt[4]{\dfrac{Y_{2007}}{Y_{2003}}} = 0{,}999$, $\overline{V} = 99{,}9$, $\overline{S} = -0{,}1\ \%$

b) $Y_{2010} = Y_{2007} \cdot \overline{K}^3 = 224{,}61\ \text{EUR}$

c) $T_t = 231{,}126 - 2{,}534t$, $t(2010) = 5$, $T_5 = 218{,}46\ \text{EUR}$

16.24. 20 dobaviteljev; 14 % dobaviteljev

e) $M^* = 286.800\ \text{EUR}$, $Me^* = 278.800\ \text{EUR}$, $Mo^* = 267.600\ \text{EUR}$, porazdelitev je asimetrična v desno

f) $\sigma = 43.600\ \text{EUR}$, $KV = 15{,}2\ \%$

16.25. c) $M = 3{,}26$, $\sigma = 0{,}934$

d) $Mo = 3$, $Me^* = 3{,}23$, porazdelitev je asimetrična v desno

16.26. c) $M^* = 28{,}52\ \text{let}$, $Me^* = 28{,}23\ \text{let}$, $Mo^* = 27{,}82\ \text{let}$

d) $\sigma = 5{,}01\ \text{let}$

16.27. a) $t(2005) = 0 \Rightarrow T_t = 310{,}912 + 6{,}581\ t$

[varianta $t(2003) = 1 \Rightarrow T_t = 291{,}169 + 6{,}581\ t$]

b) Napoved za leto 2010: $t(2010) = 5 \Rightarrow T_5 = 343{,}82\ \text{EUR}$

18 ZBIRKA POMEMBNEJŠIH FORMUL

Navadni obrestni račun

$o = \frac{G\,p\,l}{100}$ (l let), $o = \frac{G\,p\,m}{1200}$ (m mesecev), $o = \frac{G\,p\,d}{36500}$ (d dni)

Dekurzivno navadno obrestovanje $G = \frac{1.200\,G^{+}}{1.200 + p\,m}$ $G = \frac{36.500\,G^{+}}{36.500 + p\,d}$

Anticipativno navadno obrestovanje $G = \frac{1.200\,G^{-}}{1.200 - p\,m}$ $G = \frac{36.500\,G^{-}}{36.500 - p\,d}$

Obrestnoobrestni račun

Dekurzivni obrestnoobrestni račun $G_n = G_0\,r^n$, $r = 1 + \frac{p}{100}$

Anticipativni obrestnoobrestni račun $G_n = G_0\,\rho^n$, $\rho = \frac{100}{100 - \pi}$, $\pi = \frac{100\,(\rho - 1)}{\rho}$

Relativna obrestna mera $p_m = \frac{p}{m}$ (m kapitalizacijskih obdobij v letu)

Konformni obrestovalni faktor ${}_k r_m = \sqrt[m]{r}$ (m kapitalizacijskih obdobij v letu)

Periodične vloge in dvigi pri obrestnem obrestovanju

Končna vrednost vlog $S_n^{(pren)} = a\,r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, $S_n^{(post)} = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Sedanja vrednost vlog $S_0^{(pren)} = \frac{a}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, $S_0^{(post)} = \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Princip enakih razdolžnin: fiksna razdolžnina $Q = \frac{D_0}{n}$

Princip enakih postnumerandnih anuitet: fiksna anuiteta $a = \frac{D_0 r^n (r-1)}{r^n - 1}$

Relativna števila

Strukture $P_j = \frac{Y_j}{Y}$ $P_j\% = \frac{Y_j}{Y} \cdot 100$ $P_j‰ = \frac{Y_j}{Y} \cdot 1000$

Statistični koeficient $K = \frac{Y}{X}$

Koeficient obračanja zalog $K = \frac{\text{vrednost prodaje v izbranem obdobju}}{\text{povprečno stanje (vrednost) zalog}} = \frac{Y}{\overline{X}}$

Podatki s sredine (pod)obdobij $\overline{X} = \frac{1}{N} \cdot \left(X_1 + X_2 + \cdots + X_N\right)$

Podatki z začetkov ali koncev (pod)obdobij

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{X_0}{2} + X_1 + X_2 + \cdots + X_{N-1} + \frac{X_N}{2}\right)$$

Recipročni koeficient $K_r = \frac{X}{Y} = \frac{1}{K}$

Indeksi

Indeksi s stalno osnovo $I_{j/0} = \frac{Y_j}{Y_0} \cdot 100$

Verižni indeksi $V_j = I_{j/j-1} = \frac{Y_j}{Y_{j-1}} \cdot 100$

Indeksi s premično osnovo $I_{j,k/j,k-1} = \frac{Y_{j,k}}{Y_{j,k-1}} \cdot 100$

Kazalci rasti

Koeficient rasti (koeficient dinamike) $K_j = \frac{Y_j}{Y_{j-1}}$ $V_j = 100 \cdot K_j$

Stopnja rasti $S_j = \frac{Y_j - Y_{j-1}}{Y_{j-1}} \cdot 100$ $S_j = V_j - 100$ $S_j = 100 \cdot K_j - 100$

Frekvenčne porazdelitve

Kumulativa frekvenc $F_1 = f_1$, $F_j = F_{j-1} + f_j$ $(j = 2,3,\ldots,k)$

Kumulativa relativnih frekvenc $F_1^0 = f_1^0$, $F_j^0 = F_{j-1}^0 + f_j^0$ $(j = 2,3,\ldots,k)$

Srednje vrednosti

Aritmetična sredina:

navadna $M = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_N}{N} = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$

tehtana $M^* = \dfrac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + \cdots + f_r y_r}{f_1 + f_2 + \cdots + f_r} = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{r} f_j y_j$

Mediana

Iz posamičnih podatkov:

$$R = \frac{N+1}{2}, \quad Me = \begin{cases} y_R, & \text{če je } N \text{ liho število} \\ \dfrac{y_{R-0,5} + y_{R+0,5}}{2}, & \text{če je } N \text{ sodo število} \end{cases}$$

Iz frekvenčne porazdelitve: $R = \dfrac{N+1}{2}$, $Me^* = y_{0,\min} + d_0 \cdot \dfrac{R - F_{-1}}{f_0}$

Modus

Iz posamičnih podatkov: modus je vrednost, ki se največkrat pojavi.

Iz frekvenčne porazdelitve z enako širokimi razredi:

$$Mo^* = y_{0,\min} + d_0 \cdot \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}}$$

Harmonična sredina:

enostavna $H = \dfrac{N}{\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} + \cdots + \dfrac{1}{y_N}} = \dfrac{N}{\sum_{j=1}^{N} \dfrac{1}{y_j}}$

tehtana $H = \dfrac{f_1 + f_2 + \cdots + f_r}{\dfrac{f_1}{y_1} + \dfrac{f_2}{y_2} + \cdots + \dfrac{f_r}{y_r}} = \dfrac{N}{\sum_{j=1}^{r} \dfrac{f_j}{y_j}}$

Geometrijska sredina $G = \sqrt[N]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_N}$

Povprečni koeficient rasti $\overline{K} = \sqrt[N]{\frac{Y_N}{Y_0}}$ $\overline{K} = \sqrt[N]{K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_N}$

Povprečni verižni indeks $\overline{V} = \overline{K} \cdot 100$ $\overline{V} = \sqrt[N]{\frac{Y_N}{Y_0}} \cdot 100$ $\overline{V} = \sqrt[N]{V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_N}$

Povprečna stopnja rasti $\overline{S} = \overline{V} - 100$ $\overline{S} = 100 \cdot (\overline{K} - 1)$

Mere variabilnosti

Variacijski razmik $VR = y_{\max} - y_{\min}$

Varianca iz posamičnih podatkov $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j{}^2 - M^2$

Varianca iz frekvenčne porazdelitve $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{r} f_j y_j{}^2 - M^2$

Sheppardov popravek $\sigma_{cor}^2 = \sigma^2 - \frac{d^2}{12}$

Standardni odklon (standardna deviacija) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Koeficient variabilnosti $KV = \frac{\sigma}{M}$

Linearni trend

Enačba linearnega trenda $T_t = a + bt$

$$a = \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_t Y_t \qquad b = \frac{\sum_t tY_t}{\sum_t t^2}$$

Parabolični trend

Enačba paraboličnega trenda $T_t = a + bt + ct^2$

$$c = \frac{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2 Y_t - \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2 \cdot \overline{Y}}{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^4 - \left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{t=1}^{N} tY_t}{\sum_{t=1}^{N} t^2} \qquad a = \overline{Y} - c \cdot \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} t^2$$

LITERATURA

Čibej, J. A. *Matematika za poslovneže*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 2005.

Čibej, J. A. *Matematika za računovodje in finančnike*. Ljubljana: Zveza računovodij, finančnikov in revizorjev Slovenije, 2001.

Pustotnik, N. *Poslovna matematika s statistiko*. Ljubljana: GEA College PIC, d.o.o, Višja strokovna šola, 2004.

Statistični urad Republike Slovenije. *Statistični letopisi* 1999, 2002, 2005, 2006, 2007, 2008 in 2009.

Šadl, M. *Statistika za komercialiste*. Murska Sobota: Ekonomska šola, Višja strokovna šola, 2006.

Projekt **Impletum**
Uvajanje novih izobraževalnih programov na področju višjega strokovnega izobraževanja v obdobju 2008–11

Konzorcijski partnerji:

Operacijo delno financira Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada ter Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa razvoja človeških virov za obdobje 2007–2013, razvojne prioritete Razvoj človeških virov in vseživljenjskega učenja in prednostne usmeritve Izboljšanje kakovosti in učinkovitosti sistemov izobraževanja in usposabljanja.